Esquema de Pontuação da Segunda Fase do CNF - Nível 2

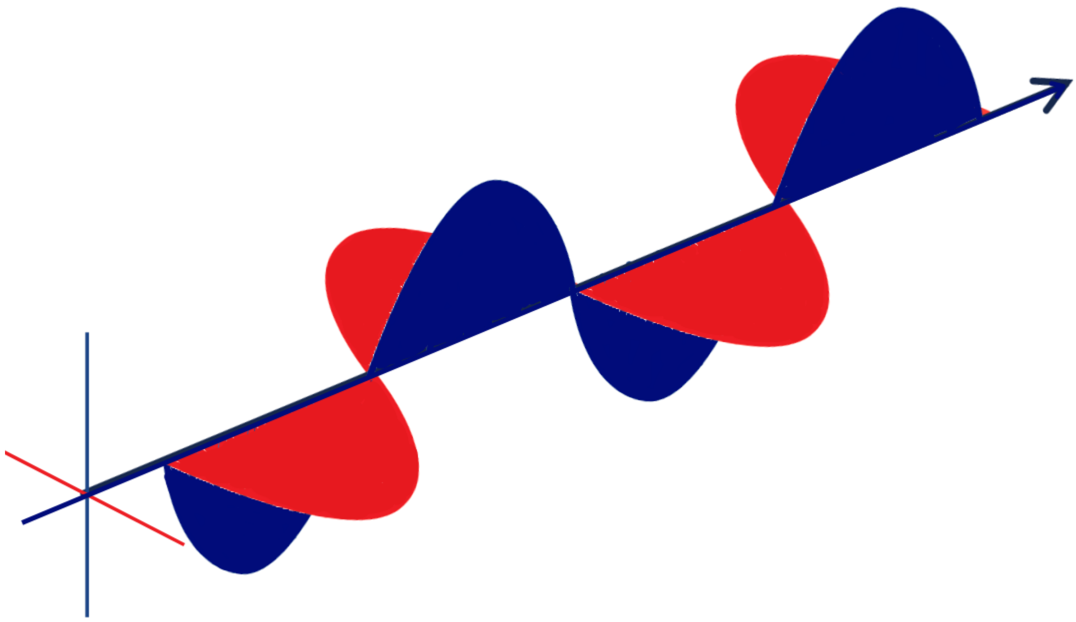


Tabela de constantes

Constante	**Valor**
Velocidade da Luz (c)	$299.792.458\,\mathrm{m/s}$
Constante de Planck (h)	$6,63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$
Carga do Elétron (e)	$1,60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
Constante de Boltzmann (k)	$1,38 \times 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$
Número de Avogadro (N_A)	$6,02 \times 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$
Raio da Terra($R_\oplus$)	$6,378 \times 10^{6}\,\mathrm{m}$
Massa da terra($M_\oplus$)	$5,97 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$
Constante dielétrica no vácuo(ϵ_0)	8,85 $\times 10^{-12}$ $\mathrm{C^2N^{-1}m^{-1}}$
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \times 10^{-8}\,\mathrm{W/m^2\,K^4}$

Importante! Cada erro algébrico acarretará em uma penalização de -0,3pt. Além disso, a correção deverá ser feita a risca de acordo com o esquema de pontuação.

Questão 1. Um problema de leis, quase penal[1]

Solução A.1

A Lei 0 atesta que corpos ditos em equilíbrio térmico têm a mesma temperatura, desse modo a temperatura final de 1 e 2 são iguais, sabemos também que o sistema é isolado e o calor que sai de um vai para o outro, logo:

$$Q = mc\Delta T \tag{1}$$

$$\Delta Q_1 + \Delta Q_2 = 0 \tag{2}$$

Usando $T_1 < T_2$

$$m_1c_1(T - T_1) = m_2c_2(T_2 - T). \tag{3}$$

$$\boxed{T = \frac{m_1c_1T_1 + m_2c_2T_2}{m_1c_1 + m_2c_2}} \tag{4}$$

Esquema de Pontuação:

- 0,2pt por considerar $\sum Q_i$=0;
- 0,8pt por resposta correta.

Solução A.2

Essa situação é semelhante à anterior, porém com uma dificuldade de não conhecermos quais são as maiores temperaturas, isto porém não é um problema, pois os calores se relacionam por:

$$\Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \Delta Q_3 = 0 \tag{5}$$

Isso implica em,

$$m_1c_1(T - T_1) + m_2c_2(T - T_2) + m_3c_3(T - T_3) = 0 \tag{6}$$

$$\boxed{T = \frac{m_1c_1T_1 + m_2c_2T_2 + m_3c_3T_3}{m_1c_1 + m_2c_2 + m_3c_3}} \tag{7}$$

Esquema de Pontuação:

- 0,2pt por considerar $\sum Q_i$=0;
- 0,8pt por resposta correta.

Solução A.3

Semelhantemente ao item A.2, temos que:

$$\sum \Delta Q_i = \sum m_ic_i(T - T_i) = 0 \tag{8}$$

[1]Autoria de Arthur Barroso Uchoa.

$$\boxed{T = \frac{\sum m_i c_i T_i}{\sum m_i c_i} = \frac{m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2 + m_3 c_3 T_3 + ... + m_N c_N T_N}{m_1 c_1 + m_2 c_2 + m_3 c_3 + ... + m_N c_N}} \quad (9)$$

Para $m_i = m = cte$ e $c_i = C = cte$, temos que:

$$T = \frac{\sum m_i c_i T_i}{\sum m_i c_i} = \frac{mcT_1 + mcT_2 + mcT_3 + ... + mcT_N}{mc + mc + mc + ... + mc} \quad (10)$$

Portanto, aglutinando termos obtemos:

$$\boxed{T = \frac{T_1 + T_2 + T_3 + ... + T_n}{N}} \quad (11)$$

Esquema de Pontuação:

- 0,5pt por $\sum \Delta Q_i$=0;
- 1,0pt pela fórmula geral correta, em somatório ou não;
- 1,0pt pelo resultado quando $m_i = m$ é $c_i = c$, em somatório ou não.

Solução B.1

No equilíbrio,

$$L(T) = L(1 + \alpha \Delta T); \Delta T = T - T_0 \quad (12)$$

De acordo com a imagem, a altura da barra será $y = \sqrt{L^2 + d^2}$, e o centro de massa, por estar no centro da barra, deve ter a metade dessa altura. Logo:

$$\boxed{y_{cm} = \frac{\sqrt{L^2[1 + \alpha(T - T_0)]^2 + d^2}}{2}} \quad (13)$$

Esquema de Pontuação:

- 0,2pt pela expressão de dilatação linear correta;
- 0,5pt pelo Teorema de Pitágoras ou métodos similares coerentes;
- 0,8pt pela resposta correta Obs: Respostas que desenvolvam ou produto notável ou desprezem α^2 estarão corretas.

Solução B.2

Utilizando a expressão do item anterior, para $T_{b_f} = T$ e $T_{b_0} = T_0$, temos:

$$\Delta y_{cm} = \frac{\sqrt{L^2[1 + \alpha(T - T_0)]^2 + d^2}}{2} - \frac{\sqrt{L^2 + d^2}}{2} \quad (14)$$

$$W = -mg\Delta y_{cm} = \boxed{-\frac{mg}{2}(\sqrt{L^2[1 + \alpha(T - T_0)]^2 + d^2} - \sqrt{L^2 + d^2})} \quad (15)$$

Esquema de Pontuação:

- 0,5pt pela expressão de Δy_{cm} correta;
- 0,5pt por resposta correta;
- -0,2pt por sinal incorreto.

Solução B.3

Pela primeira Lei da termodinâmica:

$$\Delta U = \Delta Q - W_{sist} \tag{16}$$

$$mc(T - T_0) + W_{sist} = \Delta Q \tag{17}$$

Onde, nesse sistema, $W_{sist} = -W_{peso} = mg\Delta y_{cm}$ Logo:

$$\boxed{\Delta Q = m[c(T - T_0) + \frac{g}{2}(\sqrt{L^2[1 + \alpha(T - T_0)]^2 + d^2} - \sqrt{L^2 + d^2}])} \tag{18}$$

Esquema de Pontuação:

- 0,5pt pela expressão $\Delta U = mc(T - T_0)$;
- 0,7pt por $W_{sist} = -W_{peso}$;
- 0,3pt pela resposta correta. Obs: Respostas que desprezem α^2 não serão penalizadas.

Solução B.4

Ultilizando a fórmula:

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T} \tag{19}$$

Como a temperatura do reservatório é constante e vale T;

$$\boxed{\Delta S = \frac{m[c(T - T_0) - \frac{g}{2}(\sqrt{L^2[1 + \alpha(T - T_0)]^2 + d^2} - \sqrt{L^2 + d^2})}{T}} \tag{20}$$

Esquema de Pontuação:

- 0,5pt pela fórmula da entropia correta;
- 1,0pt pela resposta final correta, de acordo com o item B.3 para não haver dupla penalidade.

Questão 2. Modelos Físicos para Cordas [2]

Solução A.1

Pelo vínculo geométrico mencionado:

$$\boxed{v_1 \cos\alpha = v_2 \cos\beta} \tag{21}$$

Esquema de Pontuação:

- 0,5pt pela resposta final correta.

Solução A.2

Nessa nova situação, o estudante deve se atentar ao fato de que há 2 relações de vínculo geométrico a serem utilizadas (1 para cada fio). Decompondo V na direção paralela ao fio da esquerda, temos:

$$V\cos\alpha = v_1 \tag{22}$$

Analogamente, para o fio da direita:

$$V\cos\beta = v_2 \tag{23}$$

Dividindo (2) por (3):

$$\boxed{\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{v_1}{v_2}} \tag{24}$$

Esquema de Pontuação:

- 0,5pt pela resposta final correta.

Solução A.3

Com $\theta = \alpha + \beta$, pode-se substituir $\alpha = \theta - \beta$ na equação (2):

$$v_1 = V\cos(\theta - \beta) = V(\cos\beta\cos\theta + \sin\beta\sin\theta) \tag{25}$$

A partir de (3), pode-se escrever $\cos\beta$ e $\sin\beta$ em função de v_2 e V:

$$\cos\beta = \frac{v_2}{V} \qquad \sin\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{v_2}{V}\right)^2} \tag{26}$$

Substituindo (6) em (5):

$$\frac{v_1}{V} = \left(\frac{v_2}{V}\cos\theta + \sin\theta\sqrt{1 - \left(\frac{v_2}{V}\right)^2}\right) \tag{27}$$

[2]Autoria de Felipe Brandão S.

$$\frac{v_1}{V} - \frac{v_2}{V}\cos\theta = \sin\theta\sqrt{1 - \left(\frac{v_2}{V}\right)^2} \tag{28}$$

Elevando ambos os lados ao quadrado:

$$\frac{v_1^2}{V^2} - 2\frac{v_1 v_2}{V^2}\cos\theta + \frac{v_2^2}{V^2}\cos^2\theta = \left(1 - \frac{v_2^2}{V^2}\right)\sin^2\theta \tag{29}$$

Multiplicando ambos os lados por V^2:

$$v_1^2 - 2v_1 v_2\cos\theta + v_2^2\cos^2\theta = \left(V^2 - v_2^2\right)\sin^2\theta \tag{30}$$

$$v_1^2 - 2v_1 v_2\cos\theta + v_2^2\underbrace{\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)}_{=1} = V^2\sin^2\theta \tag{31}$$

Enfim, isolando V, encontra-se:

$$\boxed{V = \frac{\sqrt{v_1^2 - 2v_1 v_2\cos\theta + v_2^2}}{\sin\theta}} \tag{32}$$

Esquema de Pontuação:

- 0,5pt por chegar nas equações (26) e (27), com 0,25pt por cada uma;
- 0,5pt pela resposta final correta.

Solução A.4

Pela condição de vínculo geométrico imediatamente após o início do movimento que foi estabelecida, temos:

$$\boxed{a_1\cos 45^\circ = a_2} \tag{33}$$

Para encontrar os valores de a_1 e a_2, basta escrever as equações de movimento para os dois corpos:

$$Mg - T = Ma_2 \tag{34}$$

$$T\cos 45^\circ = ma_1 \tag{35}$$

Onde T é a tração da corda. Multiplicando (14) por $\cos 45^\circ$ e somando com (15):

$$Mg\cos 45^\circ = Ma_2 cos 45^\circ + ma_1 \tag{36}$$

Como $\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$, as equações (13) e (17) ficam:

$$a_1 = \sqrt{2}a_2 \qquad Mg = Ma_2 + \sqrt{2}ma_1 \tag{37}$$

Juntando as duas e isolando a_2:

$$\boxed{a_2 = \frac{Mg}{M + 2m}} \tag{38}$$

Substituindo (17) na expressão do vínculo para encontrar a_1:

$$\boxed{a_1 = \frac{\sqrt{2}Mg}{M + 2m}} \tag{39}$$

Esquema de Pontuação:

- 0,2pt pela relação entre a_1 e a_2;
- 0,15pt por cada equação de movimento escrita;
- 0,25pt pela expressão correta de a_1.
- 0,25pt pela expressão correta de a_2.

Solução A.5

Podemos manipular a equação (19) dividindo em cima e embaixo por M, gerando:

$$a_1 = \frac{\sqrt{2}g}{1 + 2\frac{m}{M}} \tag{40}$$

Como $M >> m$, a razão $\frac{m}{M}$ que aparece no denominador tenderá a zero, o que nos resultará em:

$$\boxed{a_1 \approx \sqrt{2}g} \tag{41}$$

Esquema de Pontuação:

- 0,2pt por perceber que a razão $\frac{m}{M}$ tende a 0 no limite $M >> m$;
- 0,8pt pela resposta final correta.

Solução A.6

Como nessa situação limite $a_1 = \sqrt{2}g$, pela equação (15), a tração T ficará:

$$T\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = m(\sqrt{2}g) \tag{42}$$

$$T = 2mg \tag{43}$$

Escrevendo a força resultante vertical para cima na bolinha de massa m:

$$F_r = T \sin 45^\circ - mg = \sqrt{2}mg - mg \tag{44}$$

$$\boxed{F_r = (\sqrt{2} - 1)mg > 0} \quad (45)$$

Como as força resultante apontando para cima é maior que zero, indica que a aceleração vertical instantânea da bolinha também aponta para cima e que a força normal com o solo é nula, ou seja, ela é levantada da mesa logo após a liberação do sistema.

Esquema de Pontuação:

- 0,25pt pela força resultante vertical na massa m;
- 0,25pt pela justificativa correta do fenômeno físico.

Solução B.1

Escrevendo a força de reação normal ao solo para a parte da corda que entrou na região rugosa:

$$N(x) = m(x)g = mg\frac{x}{L} \quad (46)$$

Para a componente de atrito da força de contato, o estudande deve-se atentar ao sinal negativo, pois essa componente de força está contrária ao sentido positivo do eixo x:

$$fat(x) = -\mu N(x) \quad (47)$$

$$\boxed{fat(x) = -\frac{\mu mg}{L}x} \quad (48)$$

Esquema de Pontuação:

- 0,25pt pelo módulo correto na expressão do $fat(x)$;
- 0,25pt por acrescentar o sinal negativo na expressão do $fat(x)$.

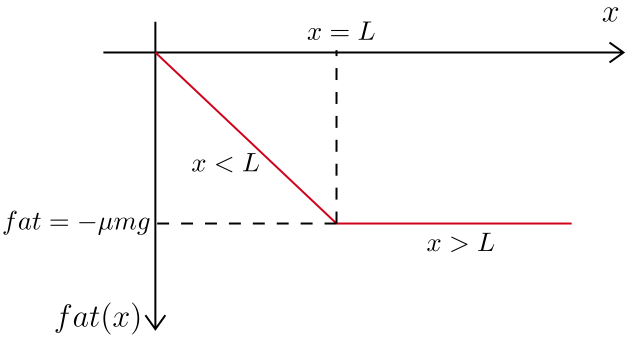
Solução B.2

Perceba que a equação para $fat(x)$ obtida no item **B.1** mostra uma dependência linear do $fat(x)$ em x; todavia, deve-se levar em conta que essa dependência só é válida até o ponto de $x = L$, no qual a corda toda já estará inserida dentro da região rugosa, ou seja, o fat deixará de crescer e atingirá seu valor máximo (em módulo) de $|fat| = \mu mg$, parando de variar para valores de x maiores que L.

Sendo assim, já temos a solução geral da função $fat(x)$:

$$fat(x) = \begin{cases} -\frac{\mu mg}{L}x, & x \leq L \\ -\mu mg, & x \geq L \end{cases} \quad (49)$$

Plotando em um gráfico $fat(x)$ por x:



Esquema de Pontuação:

- 0,4pt pelo comportamento correto em $x < L$;
- 0,4pt pelo comportamento correto em $x > L$;
- 0,2pt pelo sinal correto do $fat(x)$ no gráfico.

Solução B.3

A área do gráfico plotado anteriormente é numericamente igual ao trabalho realizado pelo $fat(x)$ durante o processo de entrada da corda na região rugosa. Sendo ela a única força que está realizando trabalho no sistema, a energia dissipada do sistema durante a entrada é, em módulo, igual ao trabalho realizado por $fat(x)$ de $x = 0$ até $x = L$.

Nesse intervalo, a função $fat(x)$ forma um triângulo de base L e altura μmg. Sendo assim:

$$\acute{A}rea = \frac{bh}{2} = \frac{(L)(\mu mg)}{2} \tag{50}$$

Finalmente:

$$\boxed{E_{dis} = \frac{\mu mgL}{2}} \tag{51}$$

Caso o estudante tenha optado por outro método e tenha obtido a resposta final correta, a pontuação será completa.

Esquema de Pontuação:

- 0,2pt por indicar que o trabalho a ser encontrado deve ser calculado de $x = 0$ até $x = L$;
- 0,3pt por indicar um método que potencialmente chegue à resposta correta (seja pelo gráfico ou outro método)
- 0,5pt pela resposta final correta.

Solução B.4

A massa Δm varia sua velocidade de 0 a v, logo, a variação da quantidade de movimento fica:

$$\Delta p = \Delta mv - \Delta m \cdot (0) = \Delta m \cdot v \tag{52}$$

Como $\Delta m = \lambda \Delta x$, temos:

$$\boxed{\Delta p = \lambda \Delta x v} \tag{53}$$

Esquema de Pontuação:

- 0,5pt pela resposta final correta.

Solução B.5

A variação da quantidade de movimento de cada bolinha gera uma força média contrária ao sentido do movimento da corda. Sendo assim, para manter a velocidade v constante, o operador deve aplicar na ponta da corda uma força de mesmo módulo e direção, porém sentido oposto ao da força média gerada pelas pequenas bolinhas. Equacionando:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\lambda v \Delta x}{\Delta t} \tag{54}$$

Mas como $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$:

$$\boxed{F = \lambda v^2} \tag{55}$$

Esquema de Pontuação:

- 0,2pt por indicar que a força do operador deve ter mesmo módulo do que a força média devido ao movimento das bolinhas;
- 0,3pt por usar $F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$;
- 0,5pt pela resposta final correta.

Solução B.6

Sendo constante a força calculada no item **B.5**, basta calcular o trabalho realizado por essa força ao mover a ponta da corda de uma distância L (comprimento da corda esticada):

$$W = F \cdot L \tag{56}$$

$$\boxed{W = \lambda v^2 L} \tag{57}$$

Esquema de Pontuação:

- 0,5pt pela resposta final correta.

Solução B.7

Ao final do processo, toda as porções da corda movem-se com a mesma velocidade v; logo, a energia cinética final do sistema é:

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{\lambda v^2 L}{2} \tag{58}$$

Ou seja, do trabalho total "investido"pelo operador ao sistema ($W = \lambda v^2 L$), apenas metade dele aperecem ao final do processo como energia cinética, indicando que a outra metade da energia cinética foi dissipada. Assim, **houve energia dissipada no processo**, que vale em módulo:

$$\boxed{E_{dis} = \frac{\lambda v^2 L}{2}} \tag{59}$$

A melhor justificativa para a ocorrência da dissipação é devido às colisões inelasticas que ocorrem entre as bolinhas ao variar-se bruscamente a quantidade de movimento de cada uma. Se o aluno escrever uma justificativa diferente, mas que induza ao raciocínio do processo se tratar de várias bruscas colisões inelasticas, a pontuação será completa.

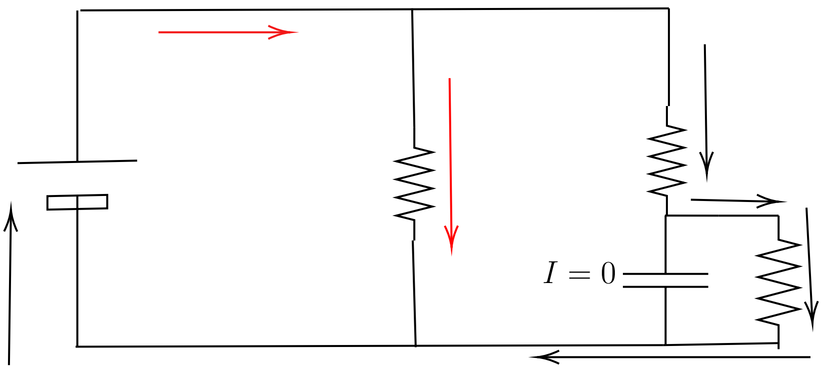
Esquema de Pontuação:

- 0,1pt por afirmar que há dissipaçoes no processo;
- 0,4pt pela expressão da energia dissipada;
- 0,5pt por uma justificativa plausível da ocorrência do fenômeno.

Questão 3. Dois Problemas (10 pontos)

Solução A.1

No estado estacionário, o capacitor está completamente carregado e, portanto, não passa corrente por ele, mas pelos três resistores.

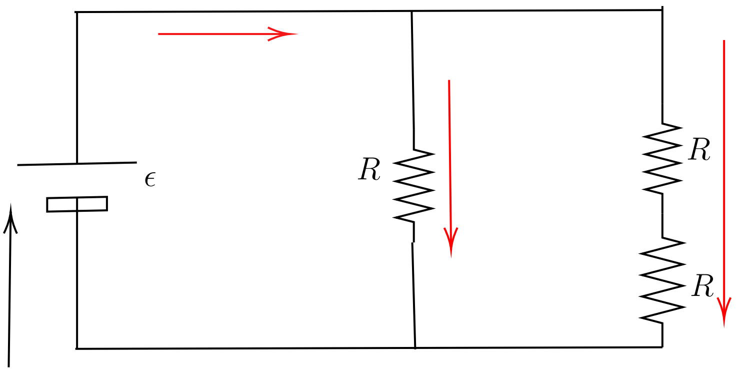


Esquema de Pontuação:

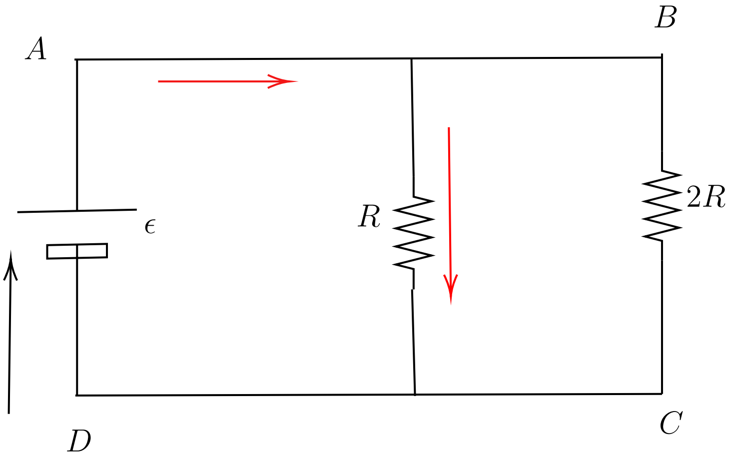
- 1,5pt Pela esquematização correta do circuito;
- -0,2pt de penalização por erro no esboço, não esboçar correntes passando por todos os resistores.

Solução A.2

Como argumentado no item A, no estado estacionário o circuito é equivalente ao circuito abaixo:



A ddp entre os terminais do primeiro resistor é simplesmente ϵ, logo a corrente que passa por ele é $i = \frac{\epsilon}{R}$, logo, a potência dissipada no resistor é P$= \frac{\epsilon^2}{R}$. Nos resistores mais distantes, podemos perceber que há uma associação em série, e a resistência equivalente é 2R.

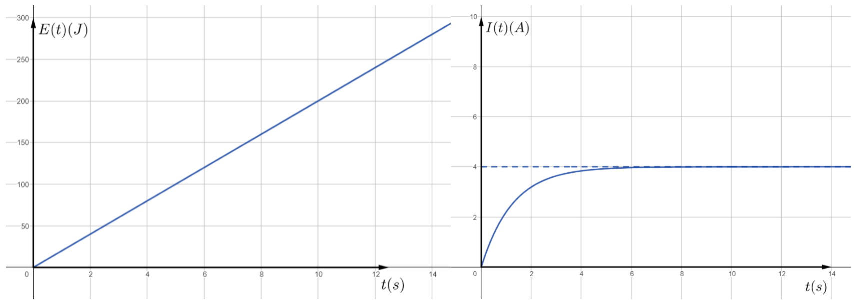


Lei das malhas em ABCD, $\boxed{2RI = \epsilon \implies I = \dfrac{\epsilon}{2R}}$.

Esquema de Pontuação:

- 0,7pt por expressão correta de corrente;
- 0,8pt por expressão correta de Potência.

Solução A.3



Como no estado estacionário, a corrente é uma constante e sabemos também que:

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = P \tag{60}$$

Logo, o coeficiente linear do gráfico de energia por tempo é $\frac{\epsilon^2}{R}$
Analisando o gráfico no ponto em que a reta casa coma escala,

$$\frac{\epsilon^2}{R} = 20 \text{ J}/s \tag{61}$$

O segundo gráfico nos revela qual o valor da corrente constante encontrada no item A.2., e ela é representada pelo valor assinalado na linha pontilhada, pois é o chamado valor assintótico, que é $I = 4$ A. Logo, temos:

$$\boxed{\frac{\epsilon^2}{R} = 20 \text{ J}/s \text{ e } \frac{\epsilon}{2R} = 4 \text{ A.}} \tag{62}$$

Daí encontramos,

$$\boxed{\epsilon = 2,5 \text{ V}; R = 0,3125\ \Omega} \tag{63}$$

Esquema de Pontuação:

- 0,2pt por interpretação correta do gráfico $E(t) \times t$;
- 0,2pt por interpretação correta do gráfico $I(t) \times t$;
- 0,3pt por resposta correta de ϵ;
- 0,3pt por resposta correta de R.

Solução B.1

A aceleração da carga é encontrada pela 2° lei de Newton

$$ma = E_0 e \implies \boxed{a = \frac{V_0 e}{md}} \tag{64}$$

Esquema de Pontuação:

- 1,0pt pela resposta correta.

Solução B.2

Fazendo uma analogia com o campo gravitacional;

$$y(t) = h_0 - \frac{gt^2}{2} \text{ e } v_0 t = x \implies y(x) = h_0 - \frac{gx^2}{2v_0^2} \tag{65}$$

Para y(x)=0

$$\boxed{x = \sqrt{\frac{2h_0 v^2}{g}}} \tag{66}$$

h_0 é a altura incidente em y.
Esquema de Pontuação:

- 0,8 pt por analogia ao movimento em campo gravitacional uniforme;
- 0,7 pt por resposta correta.

Solução B.3

Para a altura máxima, $x = L$, a barra bate no limite da placa

$$L = \sqrt{\frac{2yv^2 md}{V_0 e}} \implies y = \frac{L^2 V_0 e}{2v^2 md} \tag{67}$$

Substituindo $v_0 = 8\sqrt{\frac{V_0 L^2 e}{md^3}}$

$$y = \frac{L^2 V_0 emd^3}{2 \cdot 64 \cdot V_0 e L^2 md} \implies \boxed{y = \frac{d^2}{128}} \tag{68}$$

O que está dimensionalmente incorreto.

OBS: Não se preocupe, se foi escrito da forma acima apresentada ou se foi escrito dimensinalmente correto, não haverá penalização.

Esquema de Pontuação:

- 0,5pt por condição de $y(L) = 0$;
- 1,0pt resposta correta, $y = \frac{d}{128}$ ou $\frac{d^2}{128}$.

Solução B.4

Como os feixes se propagam uniformemente, a densidade de feixes η por unidade de área multiplicada pela área é o número de feixes, logo, o número de feixes que chegam em razão com o total é:

$$\boxed{\frac{N}{N_{tot}} = \frac{y_{máx}}{y_{tot}} = \frac{1}{128} = 0,0078125} \tag{69}$$

Esquema de Pontuação:

- 1,0pt por expressão $\frac{N}{N_{tot}} = \frac{y_{máx}}{y_{tot}}$;
- 1,0pt por expressão final correta. OBS: expressões com d multiplicando $1/128$ serão aceitas.