Sequências

João Pedro de Almeida da Silva

1 Introdução

Vamos começar a parte de sequências na álgebra, que são conjuntos de números que tem alguma ordenação.

2 Sequências

Uma sequência é uma lista de números ordenados, não necessariamente tendo padrão lógico, podendo ser finita ou infinita. Por exemplo, temos a sequência $a_1 = 3$, $a_2 = 9$, $a_3 = 2$ e $a_4 = 6$, onde estamos ordenando seus termos aumentando o índice do a.

As sequências podem assumir vários comportamentos, podendo ser crescentes, decrescentes, oscilantes, ...

Vamos conhecer suas classificações quanto aos termos:

Definição:

• **Sequência crescente:** Dado uma sequência $\{a_n\}$, a sequência é crescente se $a_{n+1} > a_n$, $\forall$ n índice da sequência.

• **Sequência decrescente:** Dado uma sequência $\{a_n\}$, a sequência é decrescente se $a_{n+1} < a_n$, $\forall$ n índice da sequência.

• **Sequência não-crescente:** Dado uma sequência $\{a_n\}$, a sequência é não-crescente se $a_{n+1} \leq a_n$, $\forall$ n índice da sequência.

• **Sequência não-decrescente:** Dado uma sequência $\{a_n\}$, a sequência é não-decrescente se $a_{n+1} \geq a_n$, $\forall$ n índice da sequência.

• **Sequência oscilante:** Dado uma sequência $\{a_n\}$, ela é oscilante se, para $a_n > a_{n-1}$, então $a_{n+1} < a_n$, e se $a_n < a_{n-1}$, então $a_{n+1} > a_n$, $\forall$ n índice da sequência.

• **Sequência constante:** Uma sequência é dita constante quando $a_{n+1} = a_n$, $\forall$ n índice da sequência.

• **Sequência periódica:** Uma sequência é dita periódica quando existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a_n = a_{n+k}$, $\forall$ n índice da sequência.

Veja que nem toda sequência é classificada com uma das classificações acima, mas devido a importância dessas classificações para estudos futuros, é essencial saber tais classificações.

Também podemos dizer para todas as classificações, temos sequências que eventualmente são elas. Por exemplo, a sequência $a_1 = 2$, $a_2 = 7$ e $a_n = 4$, $\forall$ $n \in \mathbb{Z}, n \geq 3$, não é constante, mas é eventualmente constante, ou seja, existe termo a_i que faz a sequência ser alguma das classificadas caso a sequência começasse por a_i.

Problema 1. Prove que a sequência $\{a_n\}_{n\geq 1}$ definida por $a_n = \lfloor \frac{10}{n} \rfloor$ é eventualmente constante, onde para $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro que não é maior que x.

Solução. Perceba que não temos termos negativos na sequência, pois se n é positivo, $a_n = \lfloor \frac{10}{n} \rfloor$ é não negativo. Vamos provar que a sequência fica eventualmente constante para $n \geq 11$. Perceba que se $n \geq 11$, então $\frac{10}{n} < 1$. Também, nenhum termo da sequência é negativo ou zero, fazendo com que $\frac{10}{n} > 0$, e então $0 < \frac{10}{n} < 1$, $\forall\ n \geq 11$, concluindo que $a_n = \lfloor \frac{10}{n} \rfloor = 0$, $\forall\ n \in \mathbb{Z}$, isso é, a sequência é eventualmente constante.

Problema 2. Considere a sequência:

$$1,2,3,4,5,4,3,2,1,2,3,4,5,4,3,2,1,2,3,..$$

Determine o 2025° termo da sequência.

Solução. Observe que de 8 em 8 termos a sequência fica periódica, sendo a repetição de $1,2,3,4,5,4,3,2$. Assim, veja que todo termo que deixa resto 1 por 8 será o 1, e como 2025 deixa resto 1, temos que o 2025 termo será 1.

Problema 3. (TST Cone Sul/2016) Considere a sequência de dígitos $2,0,2,9,3,\ldots$ em que cada dígito a partir do quinto é o dígito das unidades da soma dos quatro dígitos anteriores.

Prove que essa sequência de dígitos é periódica.

Solução. Veja que, dado 4 números a,b,c,d definidos, os próximo está definido como $a+b+c+d \equiv e\ (mod.10)$, então se a,b,c,d aparece novamente nessa ordem, a sequência fica eventualmente periódica. Como todo termo é $0,1,\ldots,9$, então a quantidade de quádruplas possíveis de números são 10^4, por princípio multiplicativo. Assim, como temos infinitas quádruplas na sequência e uma quantidade finita de sequências distintas, certamente alguma irá se repetir, e assim ela ficará eventualmete periódica. Para provar que ela é periódica, basta mostrar que ela vai repetir com $2,0,2,9$. Vamos supor que a sequência não é periódica, apenas eventualmente periódica. Suponha que o período começa em a,b,c,d diferente de $2,0,2,9$, isso é, temos $2,0,2,9,3,\ldots,x,a,b,c,d,e,\ldots,y,a,b,c,d,e,\ldots$

Observe que $x \neq y$, pois caso contrário, o período começaria em x,a,b,c. Porém, dado a,b,c,d, temos que $x+a+b+c \equiv d \equiv y+a+b+c\ (mod.10)$, isso é, $x+a+b+c \equiv y+a+b+c\ (mod.10)$, fazendo com que $x \equiv y\ (mod.10)$, mas como os termos da sequência são $0,1,\ldots,9$, teríamos que $x = y$, absurdo!

Logo, o período da sequência inicia em $2,0,2,9$, fazendo com que ela seja periódica.

3 Somas e produtos telescópicos

3.1 Somas telescópicas

A ideia da soma telescópica é somar termos que se anulam. Para melhor entendimento, começaremos com um problema.

Problema 1. Sabendo que $2a_n - a_{n-1} = a_{n-1} + 6$, $\forall\ n$ inteiro positivo, determine o a_{2025}, dado que $a_1 = 3$.

Solução. Passando o a_{n-1} para o lado esquerdo, ficamos com $2(a_n - a_{n-1}) = 6$, então $a_n - a_{n-1} = 3$. Se diminuirmos um índice, temos que $a_{n-1} - a_{n-2} = 3$. Somando o que tínhamos, ficamos com $a_n - a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} = 3+3$, então $a_n - a_{n-2} = 6$. Se continuarmos fazendo essa descida de índices, ficamos com:

$$a_n - a_{n-1} = 3$$
$$a_{n-1} - a_{n-2} = 3$$
$$a_{n-2} - a_{n-3} = 3$$
$$\ldots$$
$$a_3 - a_2 = 3$$
$$a_2 - a_1 = 3$$

Se somarmos tudo, temos que $a_n - a_1 = 3(n-1)$, e como $a_1 = 3$, então $a_n = 3n$. Logo, $a_{2025} = 3 \cdot 2025 = 6075$.

Problema 2. Calcule $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n}$.

Solução. A ideia principal da questão é perceber que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, $\forall\ k \in \mathbb{Z}_+^*$. Com isso, podemos substituir o somatório como $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$, mas veja que todos os termos intermediários se anulam, sobrando apenas $1 - \frac{1}{n}$, que é a resposta.

Problema 3. (OBM/2020) Prove que existem inteiros positivos $a_1, a_2, \ldots, a_{2020}$ tais que $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{2a_2} + \ldots + \frac{1}{2020a_{2020}} = 1$.

Solução. Vamos construir nossa sequência com base na ideia utilizada no problema anterior. Faça $a_1 = 2$, $a_2 = 3$,..., $a_{2019} = 2020$, pois teremos que cada fração é da forma $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Com isso, $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{2a_2} + \ldots + \frac{1}{2019a_{2019}} = 1 - \frac{1}{2020}$. Agora, basta fazer $a_{2020} = 1$, pois aí $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{2a_2} + \ldots + \frac{1}{2019a_{2019}} + \frac{1}{2020a_{2020}} = 1 - \frac{1}{2020} + \frac{1}{2020} = 1$, como queríamos.

3.2 Produtos telescópicos

A ideia do produto telescópico é muito semelhante a da soma telescópica, mas ao invés de eliminar termos somando e subtraindo, fazemos um produtório que anula os termos. Para melhor entendimento, começaremos com um problema.

Problema 1. Sabendo que $a_n = 3a_{n-1}$, $\forall\ n$ inteiro positivo, determine o a_{2025}, dado que $a_1 = 3$.

Solução. A ideia é escrever a nossa equação como $\frac{a_n}{a_{n-1}} = 3$, pois agora podemos multiplicar com os termos anteriores:

$$a_n = 3a_{n-1}$$
$$a_{n-1} = 3a_{n-2}$$
$$a_{n-2} = 3a_{n-3}$$
$$\ldots$$
$$a_3 = 3a_2$$
$$a_2 = 3a_1$$

Ao multiplicar, ficamos com $a_n = 3^{n-1} \cdot a_1$, e como $a_1 = 3$, então $a_n = 3^n$, $\forall\ n \in \mathbb{Z}_+^*$. Logo, $a_{2025} = 3^{2025}$.

Problema 2. Considere a sequência $a_1 = 14$ e $a_n = a_{n-1}^2 - 2$. Prove que o número $\sqrt{3(a_n^2 - 4)}$ é divisível por 4, $\forall\ n \in \mathbb{Z}_+^*$.

Solução. Perceba que podemos subtrair 2 da equação de recorrência, ficando com $a_n - 2 = a_{n-1}^2 - 4 = (a_{n-1} - 2)(a_{n-1} + 2)$. Como temos o $a_n - 2$ dos dois lados, mudando apenas o índice, podemos fazer um produto telescópico:

$$\begin{gathered} a_n - 2 = (a_{n-1} - 2)(a_{n-1} + 2) \\ a_{n-1} - 2 = (a_{n-2} - 2)(a_{n-2} + 2) \\ a_{n-2} - 2 = (a_{n-3} - 2)(a_{n-3} + 2) \\ \dots \\ a_2 - 2 = (a_1 - 2)(a_1 + 2) \end{gathered}$$

Ficando assim com $a_n - 2 = (a_{n-1} + 2)(\dots)(a_1 + 2)(a_1 - 2)$. Do enunciado, $a_n + 2 = a_{n-1}^2$, $\forall\ n \in \mathbb{Z}_+^*$, então temos que $a_n - 2 = (a_{n-1} + 2)(\dots)(a_1 + 2)(a_1 - 2) = a_n^2 a_{n-1}^2 \dots a_2^2 (a_1 - 2) = a_{n-1}^2 \dots a_1^2 \cdot 12 \cdot 16$, então $a_n^2 - 4 = a_n^2 \dots a_1^2 \cdot 12 \cdot 16$, $3(a_n^2 - 4) = a_n^2 \dots a_1^2 \cdot 36 \cdot 16$, que é um produto de quadrados inteiros, então a raiz é inteira e também múltipla de 4, pois temos um fator 16 dentro da raiz.

4 Limites com sequências

Ao trabalharmos com sequências, é muito comum utilizarmos limites. Para essa parte, seria interessante que o leitor soubesse o básico sobre limites, como a definição e alguns teoremas iniciais.

Definição:
• Chamamos de **ínfimo** da sequência o maior C constante tal que $C \leq a_n$, $\forall\ n$ índice da sequência.

• Chamamos de **supremo** da sequência o menor C constante tal que $C \geq a_n$, $\forall\ n$ índice da sequência.

Veja que não necessariamente a sequência tem ínfimo ou supremo definido por um número, dado que ela pode "ir pro infinito". Assim, se a sequência tem ínfimo, ela é chamada de **limitada inferiormente**. Caso ela tenha supremo, é chamada de **limitada superiormente**. Caso ela tenha ínfimo e supremo, é chamada de **limitada**.

Problema 1. Determine o supremo da sequência $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}$.

Solução. Provaremos que o supremo da sequência é 2. Perceba que $a_n < a_{n+1}$, então certamente o supremo não é um termo da sequência. Seja C o tal supremo que estamos trabalhando. Perceba que $2 > a_n = 1 + \dots + \frac{1}{2^n}$, pois basta multiplicar ambos os lados da desigualdade por 2^n. Assim, $2 \geq C$, isso é, $C = 2 - \varepsilon$, com $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Se $\varepsilon \neq 0$, então existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $\varepsilon \geq \frac{1}{2^n}$, logo, quando isso ocorrer teremos $2 - \varepsilon \leq a_n$, o que gera absurdo pelo conceito de supremo. Portanto, $C = 2$ é o supremo da sequência.

Dizemos que um sequência **converge** para um real C quando existe $\varepsilon > 0$ tal que, $\forall\ n > N$, $n, N \in \mathbb{Z}_+^*$, então $|a_n - C| < \varepsilon$. No problema anterior, veja que nossa sequência convergiu para 2, conforme o n tendia pro infinito. Caso a sequência não converja para nenhum real, dizemos que ela é

divergente.

O principal fato sobre uma sequência convergir que utilizaremos é que se a sequência é convergente, então ela é limitada.

Problema 2. Prove que a sequência $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ converge para 0.

Solução. Para provar isso, podemos mostrar que a sequência é decrescente, não fica menor que 0 e que não existe $\varepsilon > 0$ tal que, $\forall\ n \in \mathbb{Z}_+^*$, $a_n > \varepsilon$, isso é, provaremos que o ínfimo da sequência é 0.

Veja que $a_n > 0$, pois $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, e $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$. Também, $a_n > a_{n+1}$, pois basta que $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} > \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$, isso é, $2\sqrt{n+1} > \sqrt{n+2} + \sqrt{n} \to 4(n+1) > n+2+2\sqrt{n}\sqrt{n+2}+n \to 2n+2 > 2\sqrt{n}\sqrt{n+2} \to (n+1)^2 > n(n+2)$, que é verdade. Logo, basta mostrar que o ínfimo da sequência é 0. Para isso, suponha que o ínfimo é $\varepsilon > 0$. Sabemos que a sequência $\frac{1}{n}$ vai para 0 quando tendemos n para 0 (tente provar com ideias de limite, caso não saiba). Assim, pegue k tal que $\varepsilon > \frac{1}{k}$. Veja que, por ε ser o ínfimo de $\{a_n\}$, então $a_n > \frac{1}{k}$, isso é, qualquer n que escolhermos, a desigualdade segue: $k(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) > 1$.

Faça $n = k^2$, $k(\sqrt{k^2+1} - k) > 1$, isso é, $k\sqrt{k^2+1} > k^2+1$, então $k > \sqrt{k^2+1} \to k^2 > k^2+1$, absurdo! Logo, nosso ε não é maior que 0, fazendo o ínfimo da sequência ser o próprio 0 e assim, a sequência convergir para 0.

5 Problemas propostos

Problema 1. Mostre que a sequência $a_n = n^2 + n + 2$, $\forall\ n \in \mathbb{Z}_+^*$, contém apenas um quadrado perfeito.

Problema 2. Calcule:

$$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3-1}{n^3+1}.$$

Problema 3. (Shortlist IMO/2006) Uma sequência de reais $a_0, a_1, \ldots$ é definida por $a_n = \lfloor a_{n-1} \rfloor \{a_{n-1}\}$, $\forall\ n \geq 1$ e o a_0 um real arbitrário. Prove que $a_n = a_{n+2}$, para n grande.

Problema 4. Considere a sequência de Fibonacci:

$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \forall n \geq 3.$$

Calcule:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}F_{n+1}}.$$

Problema 5. (OBM/2021) Um conjunto $\mathbb{A}$ de reais é *enquadrado* quando é limitado e, para todos $a, b \in \mathbb{A}$, não necessariamente distintos, $(a-b)^2 \in \mathbb{A}$. Qual o menor real que pertence a um conjunto enquadrado?

Problema 6. (Shortlist IMO/2022) Seja $\{a_n\}$ uma sequência de reais positivos com a seguinte propriedade:

$$a_{n+1}^2 + a_n a_{n+2} \leq a_n + a_{n+2},$$

para todo $n \in \mathbb{Z}_+^*$. Prove que $a_{2022} \leq 1$.

Problema 7. Determine os valores possíveis de a_1 tal que existe uma sequência $a_1, a_2, \ldots$ de racionais satisfazendo:

$$a_{n+1}^2 - a_{n+1} = a_n,$$

para todo inteiro positivo n.

Problema 8. (Shortlist IMO/2017) Para cada inteiro $a_0 > 1$, defina a sequência $a_0, a_1, \ldots$ como: $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$, se $\sqrt{a_n} \in \mathbb{Z}$, caso contrário, $a_{n+1} = a_n + 3$.

Determine os a_0's tal que existe um $a \in \mathbb{Z}$ tal que $a_n = a$, para infinitos n's.

Problema 9. (Shortlist IMO/2018) Ache todos os inteiros $n \geq 3$ para os quais existem reais $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}, a_{n+2}$ satisfazendo $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ e

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2},$$

para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

Problema 10. Uma sequência $\{a_n\}$ é definida por $a_1 = 1$ e

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{n} + \frac{n}{a_n},$$

para todo $n \geq 1$. Prove que $\lfloor a_n^2 \rfloor = n$, $\forall\ n \geq 4$.

Problema 11. (EGMO/2025) Uma sequência crescente de inteiros positivos $a_1 < a_2 < \ldots$ é chamada *central* se para todo $n \in \mathbb{Z}_+^*$, a média aritmética dos a_n primeiros termos é a_n.

Mostre que existe uma sequência de inteiros positivos $b_1, b_2, \ldots$ tal que para toda sequência central, existem infinitos n's com $a_n = b_n$.

Bibliografia.
1. Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo
(POTI)

2. Art of Problem Solving
(AOPS)

3. Sequências númericas/Brasil escola

4. Tópicos de Matemática Elementar-Volume 3