Inversão e Extraversão

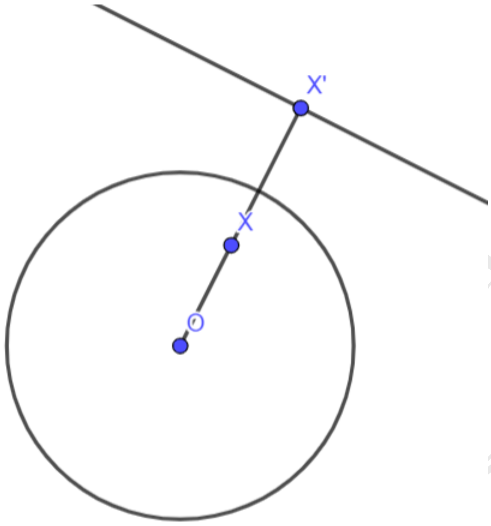
Vínicius Martins Ribeiro

1 Introdução

Nesse material iremos estudar duas técnicas extremamente poderosas, que veem aparecendo constantemente em diversas olimpíadas, as famosas inversão e extraversão.

2 O que é inversão?

Basicamente, inversão é uma transformação geométrica em relação a um centro O, que chamamos de centro da inversão, e a um raio r que leva um ponto X do plano em um ponto X^* também no plano e na reta OX satisfazendo a seguinte relação $OX.OX^* = r^2$. Além disso, Se X^* é o inverso de X então X é o inverso de X^*, além disso $A^*B^* = \frac{r^2}{OA.OB}AB$ e $AB = \frac{r^2}{OA^*.OB^*}A^*B^*$



Além disso, a reta que passa por X^* perpendicular a OX é a reta polar de X em relação a circunferência de centro O e raio r. Da mesma forma, a reta que passa por X perpendicular à OX^* é a polar de X^* em relação a mesma circunferência.

2.1 Circunferências e retas sob uma Inversão

Agora, iremos falar de uma das características mais importantes da inversão, onde uma circunferência e uma reta vão sob uma inversão em relação a um ponto O.

Mas para isso precisamos provar outra propriedade da inversão

2.1.1 Seja O o centro da inversão e A^* e B^* os inversos de A e B respectivamente, então $\angle OA^*B^* = \angle OBA$ e $\angle OB^*A^* = \angle OAB$

Prova: Pela definicão da inversão $OA^*.OA = OB^*.OB = r^2$ => ABA^*B^* é cíclico, dessa forma, a relação dos ângulos é imediata.

2.1.2 Uma reta que passa pelo centro da inversão se mantém fixa

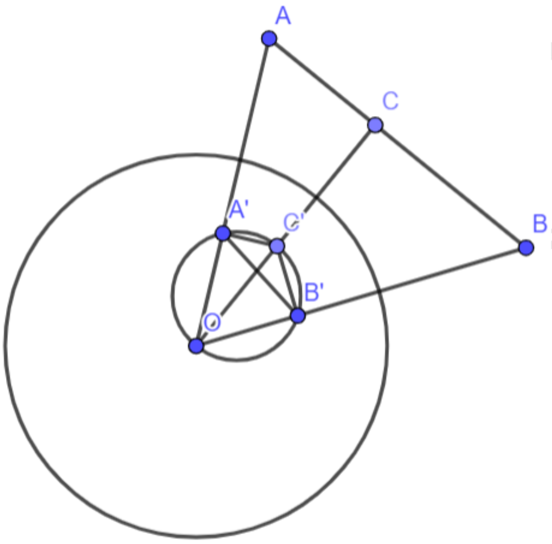
Prova: esse fato ocorre pela definição de inversão

2.1.3 Uma reta que não passa pelo centro da inversão vira uma circunferência que passa pelo centro da inversão

Prova: Sejam, A,B e C pontos quaisquer sobre uma reta onde C está entre A e B. Pelo lema 2.1.1, $\angle OC^*A^* = \angle OAC$ e $\angle OB^*A^* = \angle OAB$ como A, B e C estão namesma reta e C está entre a e B então $\angle OAB = \angle OAC$ => $\angle OB^*A^* = \angle OC^*A^*$, portanto A^*, B^*, C^* e O são concíclicos, lema provado.

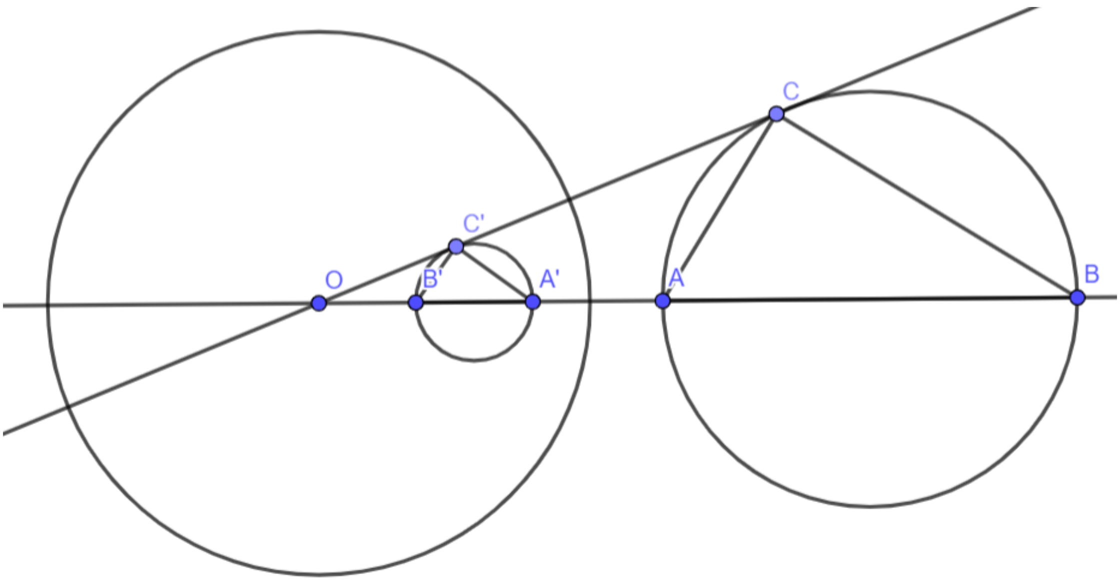
2.1.4 Uma Circunferência que passa pelo centro da inversão vai para uma reta que não passa pelo centro da inversão

Prova: Vamos usar os mesmos pontos do lema anterior. Sabemos que A, B e C são os inversos de A^*, B^* e C^* respectivamente, onde A^*, B^*, C^* e O são concíclicos. Pelo lema 2.1.1 $\angle OCA = \angle OA^*C^*$ e $\angle OCB = \angle OB^*C^*$, como A^*, B^*, C^* e O são concíclicos então $\angle OA^*C^* + \angle OB^*C^* = 180$, => $\angle OCA + \angle OCB = 180$, então A, B e C são colineares, lema provado.



2.1.5 Uma circunferência que não passa pelo centro da inversão vai para uma circuferência que não passa pelo centro da inversão

Prova: Seja A, B, C pontos em uma circunferência, onde AB é o diâmetro dessa circunferência e seja A' , B' e C' seus inversos respectivamente. Dessa forma, $\angle OA'C' = \angle OCA$ e $\angle OB'C' = \angle OCB$ note que $\angle B'C'A' = 180 - \angle C'B'A' - \angle OA'C' = \angle OB'C' - \angle OAC = \angle OCB - \angle OCA = 90$, portanto C' está na circunferência de diâmetro $A'B'$, portanto os pontos da circunferência de diâmetro AB vão para a circunferência de diâmetro $A'B'$, lema provado!



3 Inversões pelo ortocentro

Nessa sessão, iremos estudar algumas inversões famosas que tem como centro o ortocentro do triângulo. Seja ABC um triângulo e sejam D, E e F os pés das alturas de A, B e C em relação aos lados do triângulo ABC e H seu ortocentro, então temos 2 principais inversões de centro H:

3.1 Inversão de raio $\sqrt{AH.AD}$

Essa inversão é muito útil em questões de configurações de ortocentro dessa forma, trabalhei ela de forma detalhada no meu material de ortocentro e queue point nesse link: `https://ampulhetadosaber.com/wp-content/uploads/2025/03/Queue-Ponto-e-Ortocentro.pdf`

3.2 Inversão negativa

Uma inversão é chamada de inversão negativa pois ela é uma transformação composta por uma inversão seguida de uma reflexão pelo centro da inversão. Muitas vezes inversões como essa são muito úteis para manter uma circunferência, invertendo por um ponto interno a ela com o raio = -pontência desse ponto

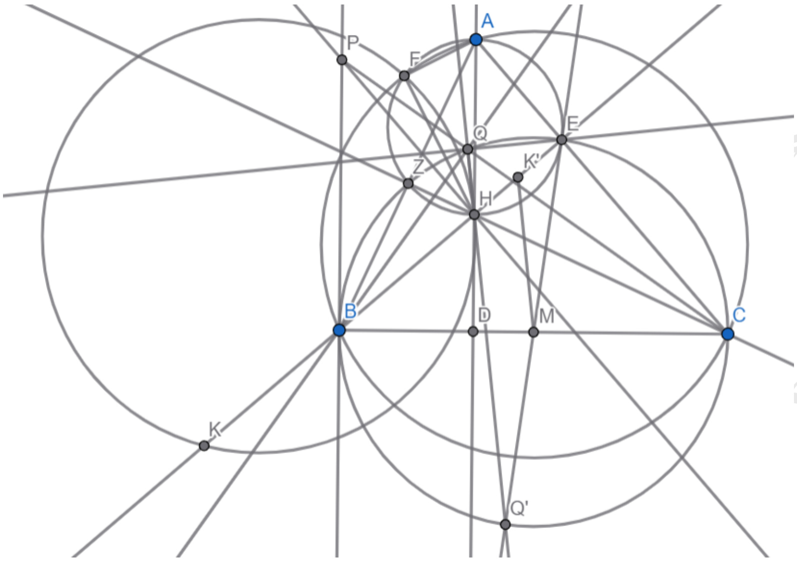
3.2.1 Inversão negativa de raio $\sqrt{-AH.HD}$

Sabemos que BFEC e BDEA são ambos quadriláteros cíclos, então olhando para a potencia de ponto de H em relação a essas circunferências, temos que $AH.HD = HE.HB = HF.HC$, portanto, perfomando uma inversão negativa por H com raio $\sqrt{-AH.HD}$ A,B e C tem como inversos D, E e F respectivamente

3.2.2 Exemplo de problema com inversão de raio $\sqrt{-AH.HD}$

P5 Sérvia TST 2018 Seja H o ortocentro de ABC , $AB \neq AC$, e seja F um ponto no circuncírculo de ABC tal que $\angle AFH = 90°$. K é o ponto simétrico de H em relação a B. Seja P um ponto tal que $\angle PHB = \angle PBC = 90°$, e Q é o pé de B a CP. Prove que HQ é tangente ao circuncírculo de FHK.

Note que nesse problema não temos boas relações de ângulos nem de segmentos com respeito a HQ, porém a maioria dos pontos dessa questão tem seus inversos conhecidos, portanto, vamos começar a solução.



Solução: Seja D, E e Z os pés das alturas de A, B e C em relação a ABCe M o ponto médio de BC. Vamos tomar a inversão negativa Ψ de centro H e raio $\sqrt{-AH.HD}$ e seja $\Psi(.)$ = (.)' Note que F' = $HF \cap BC$ = M e k' é um ponto tal que $KH.HK' = AH.HD$, porém, $BH.HE = AH.HD$ e $KH = 2BH$ => $HK' = \frac{HE}{2}$ => K' é o ponto médio de HE. Dessa forma, $\Psi(FHK)$ = KM, então como queremos (FHK) tangente à QH então queremos $KM \parallel HQ'$

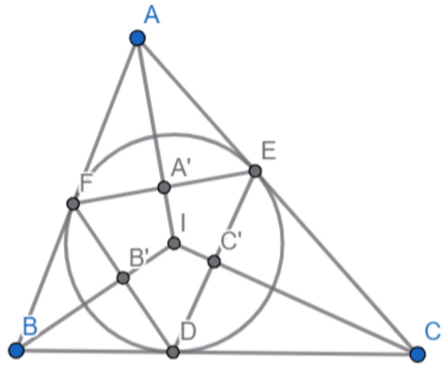
Agora, vamos marcar alguns ângulos para depois definirmos Q'. Seja $\angle PBQ = x$, note que PQHB é cíclico, pois $\angle PHB = \angle BQP = 90$ Portanto, $\angle PHQ = x$ => $\angle QHE = 90 - x$ além disso, $\angle BPQ = \angle BPC = 90 - x$, como $\angle PBC = 90$ => $\angle PCB = x$, note que Z, E e Q são concíclos, pois todos eles estão na circunferência de diâmetro BC, portanto $\angle BEQ = \angle HEQ = \angle QCB = x$, como $\angle QHE = 90 - x$ => $\angle HQE = 90$

Dessa forma, temos informações suficientes para definirmos Q', note que Q está na circunferência de diâmetro BC, que se mantém fixa pela inversão, então $Q' = HQ \cap (BCEZ)$, além disso como $\angle HQE = 90$ => Q' é a E-antípoda em relação a circunferência (BCEZ). Por fim, note que M é o centro de (BCEZ) => M é o ponto médio de EQ' e K' é o ponto médio de HE => por base média $K'M \parallel HQ'$ ■

4 Inversão pelo incírculo

Sejam D, E e F os pontos de contato do incírculo de centro I em relação aos lados BC, AC e AB do triângulo ABC, então, tomando a inversão pelo incírculo A, B, C tem como inversos os pontos médios de FE, FD e DE respectivamente.

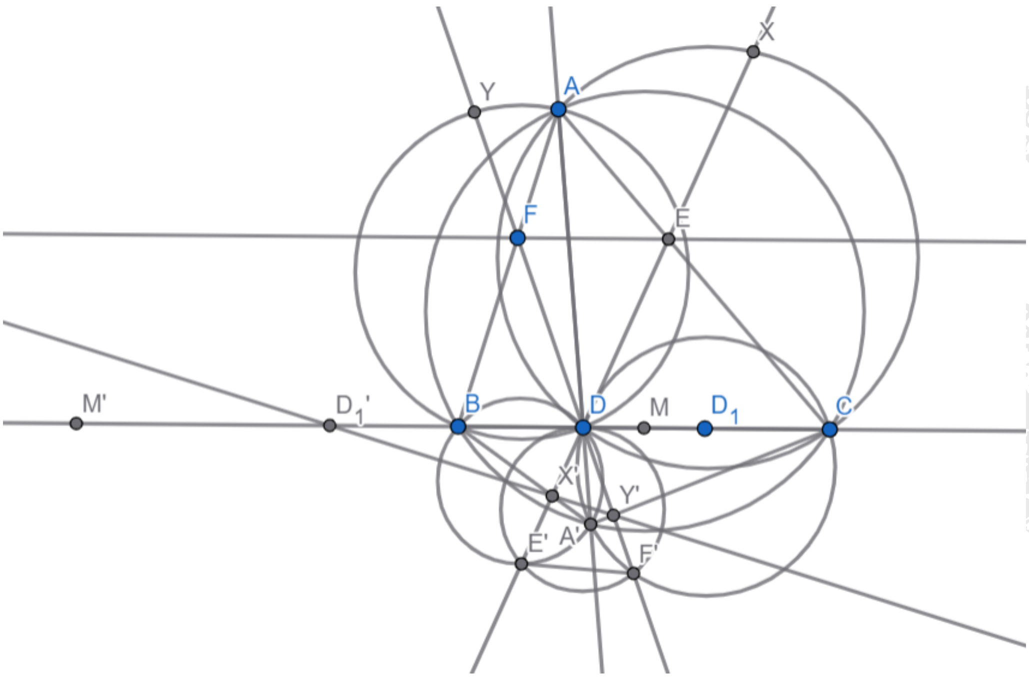
Esse fato se dá pelo fato de que se invertemos o ponto X por uma circunferência S qualquer de centro O, então o inverso de X é a interseção de OX com a polar de X em relação a S, Portanto como EF, FD e DE são as polares de A, B e C em relação ao incírculo o resultado segue.



5 Destruindo o P6 da fake USAJMO 2020 com inversão e projetiva

P6 Fake USAJMO 2020 Seja $\triangle ABC$ um triângulo. Os pontos D, E e F são colocados nos lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ e $\overline{AB}$ respectivamente, tais que $EF \parallel BC$. A reta DE encontra o circuncírculo de $\triangle ADC$ novamente em $X \neq D$. Similarmente, a reta DF encontra o circuncírculo de $\triangle ADB$ novamente em $Y \neq D$. Se D_1 é a reflexão de D através do ponto médio de $\overline{BC}$, prove que os quatro pontos D, D_1, X e Y estão em um círculo.

Analisando o problema, vemos que muitas coisas estão em função de D, o que nos leva a pensar que talvez seja uma boa ideia inverter por D. Porém o circumcírculo de ABC é um elemento importante na solução, que infelizmente não tem nada em função de D. Porém, ainda assim podemos tomar a inversão negativa de raio $\sqrt{-DB.DC}$, já que dessa forma fixamos (ABC) e além disso M vai para o Harmônico de D em relação a BC, portanto, vamos começar a solução.



Solução: Seja (.)' O inverso de (.), Vamos começar definindo os inversos dos pontos da questão, $A' = AD \cap (ABC)$, $Y' = YD \cap A'C$, $X' = XD \cap BA'$, M' = harmônico de D em relação a BC, já que devemos ter $DM.DM' = DB.DC$ e como D_1 é o reflexo de D em relação a M, então D_1' é o ponto médo de DM', $E = DE \cap (BDA')$ e por fim, $F' = DF \cap (A'DC)$ e como $EF \parallel BC$

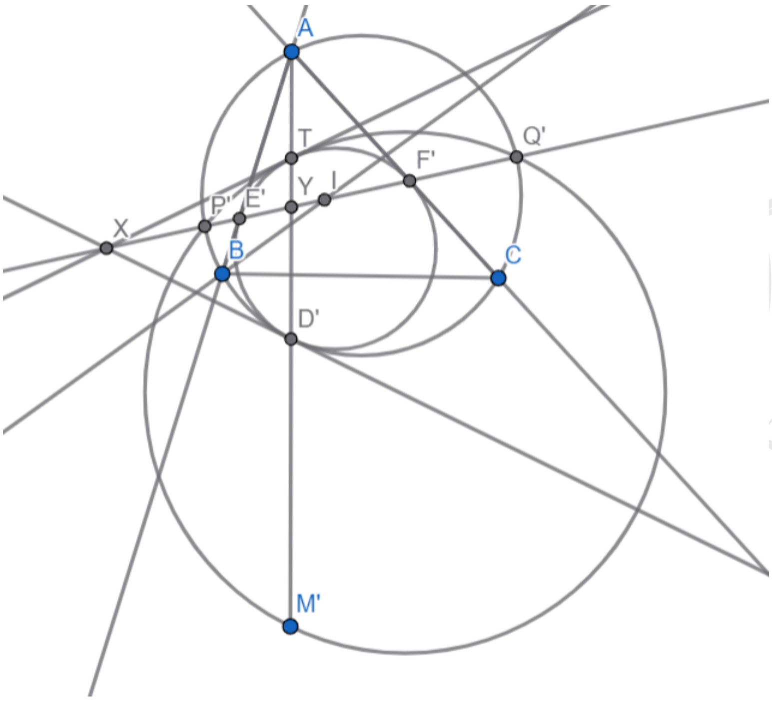
Como D_1' é o ponto médio de DM' e $(DM';BC) = -1$, temos que $D_1'D^2 = D_1'B.D_1'C$ => D_1' está no eixo radical de (DEF) e (ABC), porém note que a potência de ponto de X' em relação à $(DE'F') = X'D.X'E'$ e a potência de ponto de X' em relação à (ABC) é $X'A'.X'B$, porém note que $X' = DE' \cap BA'$ e $BDAE$ é cíclico => $X'A'.X'B = X'D.X'E$ => X' está no eixo radical de (DEF) e (ABC), analogamente, Y' também está, portanto D_1', X' e Y' são colineares => DD_1XY é cíclico ■

6 O que é extraversão?

Dado um triângulo qualquer ABC, sejam a, b e c os lados opostos dos vértices A, B e C respectivamente. Dessa forma, extraversão é uma inversão de centro A e raio $\sqrt{bc}$ seguido de uma reflexão pela bissetriz, dessa forma, trocamos B e C e trocamos retas isogonais.Essa transformação é muito útil para questões onde temos muitas retas isogonais e não temos muitas idéias para a figura original, será mais fácil de entender no próximo exemplo.

6.1 G4 IMO Shortlist 2017 com extraversão

G4 IMO Shortlist 2017 No triângulo ABC, seja ω o excírculo oposto a A. Sejam D, E e F os pontos onde ω é tangente a BC, CA e AB, respectivamente. O círculo AEF intercepta a reta BC em P e Q. Seja M o ponto médio de AD. Prove que o círculo MPQ é tangente a ω.



Solução: Vamos tomar a extraversão Ψ, Note que o excírculo vai para uma circunferência tangente a $\Psi(BC), \Psi(AB)$ e $\Psi(AC)$, note que B e C trocam de lugar sobre a extraversão, portanto $\Psi(BC) = (ABC), \Psi(AB) = AC$ e $\Psi(AC) = AB$, seja $\Psi(.) = (.)'$, então $P' = EF \cap (ABC)$, mais próximo de E' e $Q' = E'F' \cap (ABC)$, mais próximo de F' e M' é a reflexão de A por D'.

Lema 1: seja T = $AD' \cap D'E'F'$, então as tangentes de $(D'E'F')$ por D' e T' concorrem em $E'F'$ no ponto X

Prova: Note que sendo I o incentro de $\triangle ABC$, então I é o ponto médio de $E'F'$, como AE' e AF' são tangentes a $D'E'F'$, Seja Y = $AD' \cap E'F'$, então $D'Y$ é a simediana de $D'E'F'$, portanto o lema está provado!

Lema 2:, $T \in (M'P'Q')$

Prova: queremos $YT.YM' = YP'.YQ'$, porém por potência de ponto em (ABC), sabemos que $YA.YD' = YP'.YQ'$, portanto, queremos $YT.YM' = YA.YD'$ <=> $\frac{YA}{YT} = \frac{YM'}{YD'}$ <=> $\frac{TA}{YT} = \frac{DM'}{YD'} = \frac{AD'}{YD'}$, ou seja queremos $(TD';AY) = (TD';E'F') = -1$, projetando por F'. Portanto lema provado! Por fim, $XD'^2 = XE'.XF'$ e $XD'^2 = XP'.XQ'$, por potência de ponto em (ABC), porém note que $XD'^2 = XT^2 = XE'.XF' = XQ'.XP'$, portanto $(M'P'Q')$ e $(D'E'F')$ são tangentes ■

7 Problemas

Problema 1 (P4 Cone Sul TST2 2023) Seja ABC um triângulo, e D um ponto em seu interior. Definimos o ponto A' como ponto médio do arco BDC, na circunferência que passa por B,C e D. Da mesma maneira, defina B' como o ponto médio do arco ADC e C' como o ponto médio do arco ADB. Prove que existe uma única circunferência que passa por D,A',B',C'.

Problema 2(P4 Cone Sul TST2 2022) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo tal que $\angle ABC = \angle ADC = 135°$. Sejam M e N pontos nas semirretas AB e AD, respectivamente, tais que $\angle MCD = \angle NCB = 90°$. As circunferências circunscritas aos triângulos AMN e ABD se intersectam em A e K. Prove que $\angle AKC = 90°$.

Problema 3(G3 IMO Shortlist 2017) Seja O o circuncentro de um triângulo agudo ABC. A reta OA intercepta as altitudes de ABC por B e C em P e Q, respectivamente. As altitudes se encontram em H. Prove que o circuncentro do triângulo PQH está em uma mediana do triângulo ABC.

Problema 4(RMM 2019 P2) Seja $ABCD$ um trapézio isósceles com $AB \parallel CD$. Seja E o ponto médio de AC. Denote por ω e Ω os circuncírculos dos triângulos ABE e CDE, respectivamente. Seja P o ponto de cruzamento da tangente a ω em A com a tangente a Ω em D. Prove que PE é tangente a Ω.

Problema 5(P4 EGMO TST2 Brasil 2024) Seja $ABCD$ um quadrilátero cíclico com todos os lados distintos que tem um círculo inscrito. O incircle de $ABCD$ tem centro I e é tangente a AB, BC, CD e DA nos pontos W, X, Y e Z, respectivamente. Seja K a intersecção das retas WX e YZ. Prove que KI é tangente ao circumcircle do triângulo AIC.

Problema 6(IMO 2015 P6) Seja ABC um triângulo agudo com $AB > AC$. Seja Γ seu circuncírculo, H seu ortocentro e F o pé da altitude de A. Seja M o ponto médio de BC. Seja Q o ponto em Γ tal que $\angle HQA = 90°$ e seja K o ponto em Γ tal que $\angle HKQ = 90°$. Suponha que os pontos A, B, C, K e Q sejam todos diferentes e estejam em Γ nesta ordem.

Prove que os circuncírculos dos triângulos KQH e FKM são tangentes entre si..

Problema 7 (ELMO Shortlist 2013) Sejam ω_1 e ω_2 dois círculos ortogonais, e seja o centro de ω_1 = O. O diâmetro AB de ω_1 é selecionado de modo que B fique estritamente dentro de ω_2. Os dois círculos tangentes a ω_2 através de O e A tocam ω_2 em F e G. Prove que o quadrilátero FOGB é cíclico.

Problema 8(P4 TST3 Cone Sul 2024) Seja ABC um triângulo, O seu circuncentro e Γ seu circuncírculo. Sejam E e F pontos em AB e AC, respectivamente, tais que O seja o ponto médio de EF. Seja $A' = AO \cap \Gamma$, com $A' \neq A$. Finalmente, seja P o ponto na reta EF tal que $A'P \perp EF$. Prove que as retas EF, BC e a tangente a Γ em A' são concorrentes e que $\angle BPA' = \angle CPA'$.

Bibliografia: Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads e Aops