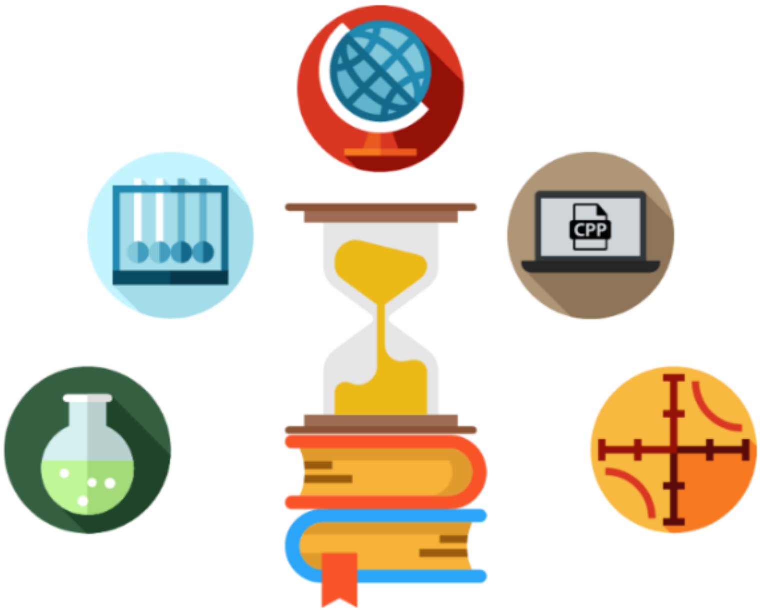
Partes inteiras/Partes fracionárias

Arthur Spuri



Introdução

A função parte inteira, denotada $\lfloor x \rfloor$, associa cada real x ao maior inteiro que é menor ou igual a ele. Por exemplo, $\lfloor 3 \rfloor = 3, \lfloor \pi \rfloor = 3, \lfloor -\pi \rfloor = -4$. Podemos vê-la intuitivamente como sendo o processo de "arredondar o número para baixo". Similarmente, a função teto de x, representada por $\lceil x \rceil$, associa cada real x ao menor inteiro que é maior ou igual a ele. É o processo de "arredondar para cima".

Por fim, temos a parte fracionária de x, denotada $\{x\}$, que representa a parte do número depois da vírgula, ou a parte decimal dele. Por exemplo, temos $\{3,5\} = 0,5; \{\pi\} = 0,14159265...; \{-7,33\} = -0,67$ (perceba que para os negativos ocorre algo estranho, onde a parte fracionária não representa a parte após a vírgula, mas sim quanto adicionamos à parte inteira do número para chegar a ele). Podemos escrevê-la como sendo $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$

Essas três funções, embora tenham aparências amigáveis, podem dar bastante trabalho caso sejam bem trabalhadas em questões. A seguir, listarei algumas de suas propriedades básicas e então mostrarei exemplos de questões para treinar ideias para resolver questões desse tipo.

1 Propriedades da parte inteira/fracionária

Parte Inteira $\lfloor x \rfloor$

- Se $x \in \mathbb{Z}$, então $\lfloor x \rfloor = x$.
- Para todo $x \in \mathbb{R}$, vale:
$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$
- Se $n \in \mathbb{Z}$, então:
$$\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$$
- Se $x \in \mathbb{R}$, então:
$$\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$$

Parte Fracionária $\{x\}$

- Para todo $x \in \mathbb{R}$:
$$0 \leq \{x\} < 1$$
- $\{x\} = 0$ se, e somente se, $x \in \mathbb{Z}$
- $\{x\} = x$ se, e somente se, $0 \leq x < 1$
- Para todo $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{Z}$:
$$\{x + n\} = \{x\}$$

Deixo como exercício para você a argumentação do porquê dessas propriedades serem válidas.

Como vemos acima, não existem tantas propriedades para essas funções, e as que existem são intuitivas e lógicas, o que faz parecer com que não seja possível complicar muito uma questão dessa matéria. Mesmo assim, não se engane, pois a dificuldade de problemas com essas funções não está no uso das propriedades, mas nas ideias necessárias para resolver problemas desse tipo, como veremos a seguir.

2 Exemplos resolvidos

- **Exemplo 1:**

  Calcule $\sum_{k=0}^{n}\lfloor\sqrt{k}\rfloor$ em função de n.

- **Solução:**

  Note que, para todos os termos de $k = x^2$ até $k = (x+1)^2 - 1$, inclusive, o valor de $\sqrt{k}$ será sempre x, uma vez que a única forma de isso não ser verdade é se tivermos:

  $$x+1 \leq \sqrt{k} \Leftrightarrow (x+1)^2 \leq k,$$

  O que contradiz nossa hipótese. Agora, perceba que existem exatamente $2x+1$ números nesse intervalo, já que $(x+1)^2 - x^2 = x^2 + 2x + 1 - x^2 = 2x+1$. Assim, para cada x tal que $(x+1)^2 \leq n$, somaremos $(2x+1) * x = 2x^2 + x$. Logo, o valor desse somatório até o maior x que satisfaz essa condição(chame-o de x_m), teremos:

  $$\sum_{k=0}^{(x_m+1)^2-1}\sqrt{k} = \sum_{i=0}^{x_m}(2i+1)i = \sum_{i=0}^{x_m}2i^2 + i = 2\sum_{i=0}^{x_m}i^2 + \sum_{i=0}^{x_m}i = 2\frac{x_m(x_m+1)(2x_m+1)}{6} + \frac{x_m(x_m+1)}{2}.$$

  Para os números que restam, sua soma será simplesmente $(n-x_m)(x_m+1)$, pois teremos $n-x_m$ termos, cada um valendo $\lfloor\sqrt{k}\rfloor = x_m+1, (x_m+1)^2 \leq k < (x+2)^2$. A soma, portanto, será:

  $$\sum_{k=0}^{n}\lfloor\sqrt{k}\rfloor = \sum_{k=0}^{(x_m+1)^2-1}\sqrt{k} + \sum_{k=(x_m+1)^2}^{n}\sqrt{k} = \frac{x_m(x_m+1)(2x_m+1)}{3} + \frac{x_m(x_m+1)}{2} + (n-x_m)(x_m+1).$$

  A questão, porém nos pede a resposta em função de n. Para isso, basta notar que $x_m = \lfloor\sqrt{n}\rfloor - 1$, logo:

  $$\sum_{k=0}^{n}\lfloor\sqrt{k}\rfloor = \frac{(\lfloor\sqrt{n}\rfloor-1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor(2\lfloor\sqrt{n}\rfloor-1)}{3} + \frac{(\lfloor\sqrt{n}\rfloor-1)(\lfloor\sqrt{n}\rfloor)}{2} + (n-\lfloor\sqrt{n}\rfloor+1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor$$

  podemos reescrever isso como sendo:

  $$\sum_{k=0}^{n}\lfloor\sqrt{k}\rfloor = \frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor\left(4\lfloor\sqrt{n}\rfloor^2 - 9\lfloor\sqrt{n}\rfloor + 6n + 5\right)}{6}$$

  E terminamos.

- **Exemplo 2: (OCM 2023** Seja n um número inteiro positivo e $A = (a_{ij})$ uma matriz $n \times n$ de números reais tal que a soma dos números em cada linha e em cada coluna é um inteiro. Mostre que existe $B = (b_{ij})$, uma matriz $n \times n$ de números inteiros que satisfaz todas as seguintes condições:

  (i) $|b_{ij} - a_{ij}| < 1$ para todos $i, j \in \{1, \ldots, n\}$;

  (ii) a soma dos números na i-ésima linha de B é igual à soma dos números na i-ésima linha de A para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$;

  (iii) a soma dos números na j-ésima coluna de B é igual à soma dos números na j-ésima coluna de A para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$.

  Solução. Definimos $C = (c_{ij})$ como a matriz obtida tomando $c_{ij} = \lfloor a_{ij} \rfloor$. Como $a_{ij} - \lfloor a_{ij} \rfloor \in [0, 1)$, sabemos que $|c_{ij} - a_{ij}| < 1$, e portanto qualquer entrada que seja c_{ij} somado a 1 também estará a menos de 1 de a_{ij}, respeitando a condição (i).

  Denotemos por r_i a diferença entre a soma da linha i de A e a soma da linha i de C:

$$r_i = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - \lfloor a_{ij} \rfloor)$$

  Como a soma da linha de A é inteira e a soma da linha de C também é inteira (pois todos os c_{ij} são inteiros), concluímos que $r_i \in \mathbb{Z}$. Além disso, $0 \leq r_i < n$. Analogamente, definimos para cada coluna j:

$$c_j = \sum_{i=1}^{n} (a_{ij} - \lfloor a_{ij} \rfloor)$$

  e temos que $c_j \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq c_j < n$. Ademais,

$$\sum_{i=1}^{n} r_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - \lfloor a_{ij} \rfloor) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (a_{ij} - \lfloor a_{ij} \rfloor) = \sum_{j=1}^{n} c_j$$

  Denotemos esse total por t.

  Nosso objetivo agora é modificar C somando 1 em exatamente t entradas distintas, de forma a corrigir as somas das linhas e colunas. Para isso, construiremos uma matriz $X = (x_{ij}) \in \{0, 1\}^{n \times n}$ tal que:

  – cada linha i tenha exatamente r_i entradas iguais a 1;

  – cada coluna j tenha exatamente c_j entradas iguais a 1.

  No total, as linhas precisam conter t uns, assim como as colunas. Suponha que precisamos colocar uns em uma linha para ajustar sua soma. Necessariamente, também falta preencher ao menos uma coluna, visto que cada 1 que colocamos contribui simultaneamente para a soma de uma linha e de uma coluna. Como toda linha se encontra com toda coluna em uma posição da matriz, sempre podemos colocar um 1 nesse ponto de interseção sem ultrapassar os limites impostos por r_i e c_j. Repetindo esse processo preenchendo uma linha de cada vez até preencher todos os t uns, sempre tomando cuidado para que não haja uma coluna que precisa de mais preenchimentos que o número de linhas que ainda precisam de preenchimento, o que pode ser feito facilmente preenchendo as colunas uniformemente, garantimos que X pode ser construída com as propriedades desejadas.

Definimos então a matriz final como $B = C + X$. Como $c_{ij} \in \mathbb{Z}$ e $x_{ij} \in \{0,1\}$, temos que $b_{ij} \in \mathbb{Z}$ e $|b_{ij} - a_{ij}| < 1$, satisfazendo (i). As somas das linhas de B são:

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (\lfloor a_{ij} \rfloor + x_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} \lfloor a_{ij} \rfloor + r_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

E, analogamente, as somas das colunas também coincidem com as de A. Assim, B satisfaz as três condições, e terminamos.

- **Exemplo 3: (IMO 2024)** Encontre todos os reais α tais que, para qualquer n natural, temos que:

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \lfloor 3\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

É um múltiplo de n.

Solução: Inicialmente, veja que podemos escrever $\alpha = \lfloor \alpha \rfloor + \{\alpha\}$(pela definição da parte inteira). Agora, a soma até o enésimo termo se torna:

$$\lfloor \lfloor \alpha \rfloor + \{\alpha\} \rfloor + \lfloor 2(\lfloor \alpha \rfloor + \{\alpha\}) \rfloor + \lfloor 3(\lfloor \alpha \rfloor + \{\alpha\}) \rfloor + \cdots + \lfloor n(\lfloor \alpha \rfloor + \{\alpha\}) \rfloor$$

Agora, sabemos que, para qualquer x inteiro, é válido que $\lfloor x + y \rfloor = x + \lfloor y \rfloor$. Como $\lfloor \alpha \rfloor$ é inteiro, essa expressão se torna:

$$\sum_{k=1}^{n} k\lfloor \alpha \rfloor + \sum_{k=1}^{n} \lfloor k\{\alpha\} \rfloor = \lfloor \alpha \rfloor \frac{n(n+1)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lfloor k\{\alpha\} \rfloor$$

Agora, note que como $\lfloor \{\alpha\} \rfloor = 0$, já que a parte fracionária é no mínimo zero e nunca maior ou igual a 1. Assim, considere os dois casos abaixo:

Caso 1: $\lfloor 2\{\alpha\} \rfloor = 0$

Suponha que $\lfloor n\{\alpha\} \rfloor = 0$ seja válido até $n = k$. Agora, note que pelo enunciado, temos que:

$$2 | 3\lfloor \alpha \rfloor + 0 = 3\lfloor \alpha \rfloor$$

Isto é, $\lfloor \alpha \rfloor$ é par. Agora, vamos olhar o que acontece em n = k:

$$n | \lfloor \alpha \rfloor \frac{n(n+1)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lfloor k\{\alpha\} \rfloor = \lfloor \alpha \rfloor \frac{n(n+1)}{2} + 1$$

Agora, note que por $\lfloor \alpha \rfloor$ ser par temos que o primeiro termo da soma será múltiplo de n, e portanto nos resta $n|1$, um absurdo! E portanto $\lfloor n\{\alpha\} \rfloor = 0$ é válido para todo n, o que implica que $\{\alpha\} = 0 \Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{Z}$. Agora, como ainda é válido que $\lfloor\alpha\rfloor = \alpha$ é par, basta verificar que essa condição é suficiente. De fato,

$$n|\lfloor\alpha\rfloor\frac{n(n+1)}{2} + \sum_{k=1}^{n}\lfloor k\{\alpha\}\rfloor = \frac{\alpha}{2}n(n+1);$$

E concluímos que essa condição é necessária e suficiente para o problema, terminando esse caso. **Caso 2:** $\lfloor 2\{\alpha\}\rfloor = 1$

Temos que o segundo termo da sequência será:

$$3\lfloor\alpha\rfloor + 1;$$

Que terá que ser par. Isso implica que $\lfloor\alpha\rfloor$ é ímpar. Agora, considere a seguinte afirmação:

Existe r inteiro tal que $\lfloor n\{\alpha\}\rfloor = \lfloor(n+1)\{\alpha\}\rfloor$.

Prova:

Podemos escrever $\{\alpha\} = 1 - x, x \leq 1$, de modo que $n\{\alpha\} = n - nx$.

Agora, note que haverá um n maior ou igual a um para o qual $nx \geq 1, (n-1)x \leq 1$. No momento que trocamos o índice de n-1 para n, o que vai acontecer, já que começamos no índice zero, a parte inteira da soma não varia, pois $\lfloor n - nx\rfloor = \lfloor n\rfloor - \lfloor nx\rfloor$, e no momento da troca aumentamos n em 1, porém a parte inteira de nx finalmente vai de zero para 1, o que cancela com o aumento do n, e terminamos.

Agora, analisemos o momento em que isso ocorre. Teremos:

$$n+1|\lfloor\alpha\rfloor\frac{n(n+1)}{2} + \sum_{k=1}^{n}\lfloor k\{\alpha\}\rfloor = \lfloor\alpha\rfloor\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} + n \Leftrightarrow n+1|n$$

Um absurdo! Portanto não temos soluções nesse caso.

Assim, concluímos que uma condição necessária e suficiente para que o enunciado seja satisfeito é que tenhamos $\alpha = 2x, x \in \mathbb{Z}$

3 Problemas propostos

- **Problema 1 (Rioplatense).** Seja $r \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\left\lfloor r + \frac{19}{100} \right\rfloor + \left\lfloor r + \frac{20}{100} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor r + \frac{92}{100} \right\rfloor = 554.$$

  Calcule $\lfloor 100r \rfloor$.

- **Problema 2** (*Fórmula de Polignac*). Seja p um primo. Então o maior expoente e tal que $p^e \mid n!$ é

$$e = \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor.$$

- **Problema 3 (República Tcheca e Eslovaca)** Encontre todos os números reais x tais que

$$x \lfloor x \lfloor x \lfloor x \rfloor \rfloor \rfloor = 88.$$

- **Problema 4 (TST 3 CONE 2023, Brasil)** Seja n um inteiro positivo. Prove que

$$n\sqrt{19} \cdot \{n\sqrt{19}\} > 1,$$

  em que $\{x\}$ denota a **parte fracionária do número** x.

- **Problema 5 (Canadá 1998)** Determine o número de soluções reais da equação

$$\left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a}{5} \right\rfloor = a.$$

4 Dicas para os problemas

- 1: Tente escrever $r = x + \frac{y}{100}$, onde x e y são ambos inteiros.
- 2: Pense em quantas vezes p aparece em N fatorial. E p^2? e p^3? e p^i? Como cada um contribui para o expoente de p?
- 3: Teste quais valores para $\lfloor x \rfloor$ podem fornecer alguma solução, para obter uma restrição de x que ajudará.
- 4: Tente escrever $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ e analisar a expressão que surge.
- 5: Busque um padrão de repetição testando os números iniciais

Com isso, encerro esse material de função parte inteira/função parte fracionária.