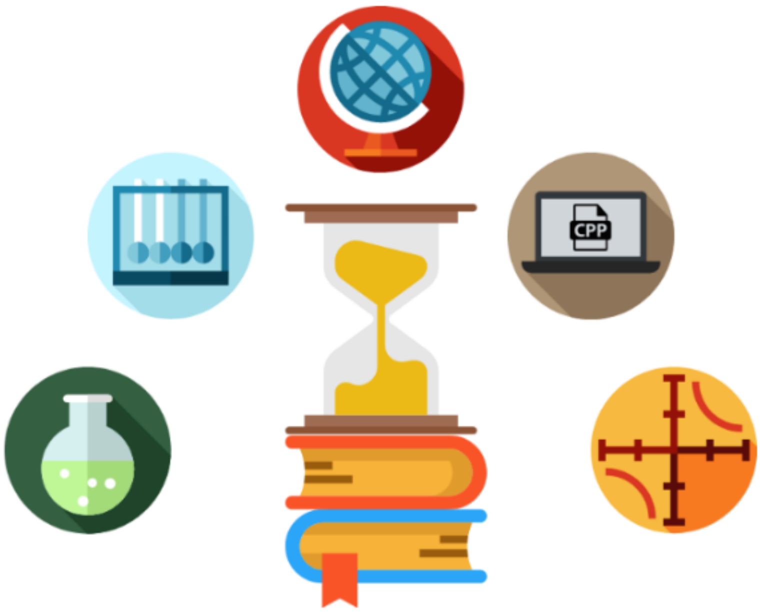
Recorrências

João Pedro de Almeida da Silva



1 Introdução

O objetivo deste material é introduzir as recorrências na parte da álgebra. Para isso, é recomendável que o leitor já saiba o básico sobre sequências, cujo material já está no AMPS:
Sequências/Ampulheta do Saber

Vamos começar introduzindo as recorrências lineares de primeira e segunda ordem nas primeiras seções do material e além disso ver algumas questões importantes.

2 Progressões aritméticas e geométricas

Começaremos falando sobre as progressões aritméticas e geométrica, também conhecidas como recorrências de primeira ordem.

2.1 Progressões aritméticas (PA's)

As progressões aritméticas, também conhecidas como PA's, são sequências onde cada termo é acrescido uma certa constante em relação ao anterior, isso é, $a_n = a_{n-1} + c$, para $c \in \mathbb{R}$. Veja que, ao falar de somas telescópicas, acabamos trabalhando com PA's.

Assim, para resolver essa PA, se o primeiro termo da sequência $a_1 = t$, para $t \in \mathbb{R}$, temos que $a_n - a_{n-1} = c$, e fazendo uma soma telescópica, temos que $a_n - a_1 = (n-1)c$, fazendo com que $a_n = a_1 + c(n-1)$, $\forall$ n índice da sequência.

Problema 1. Determine o n-ésimo termo da sequência $a_n = a_{n-2} + 7$ de índices positivos, sabendo que $a_1 = 2$ e $a_2 = 6$.

Solução. Perceba que podemos separar entre índices pares e ímpares, pois nenhum par tem relações com os ímpares, dado que n e $n-2$ tem mesma paridade. O mesmo argumento pode ser usado para ímpares. Assim, defina sequências auxiliares $\{b_i\}$ e $\{c_i\}$, onde $b_i = a_{2i-1}$ e $c_i = a_{2i}$. Dessa forma, temos que $b_i = b_{i-1} + 7$ e $c_i = c_{i-1} + 7$, onde $b_1 = 2$ e $c_1 = 6$. Como nossas sequências são PA's, basta usar a fórmula que provamos:

- $b_n = b_1 + c(n-1) = 2 + 7(n-1)$;
- $c_n = c_1 + c(n-1) = 6 + 7(n-1)$.

Com isso, temos que, se $n = 2k-1$, o n-ésino termo é $a_{2k-1} = b_k = 2 + 7(k-1)$, e para $n = 2k$, o n-ésimo termo é $a_{2k} = c_k = 6 + 7(k-1)$.

Problema 2. Determine $1 + 2 + \ldots + n$.

Essa é a famosa soma de Gauss. Veja que estamos somando termos que fazem parte da PA $a_n = a_{n-1} + 1$, com $a_1 = 1$. Vamos determinar algo mais forte, dado uma PA, qual a soma dos seus n's primeiros termos? Seja $\{a_n\}$ uma sequência com $a_n = a_{n-1} + c$. Queremos determinar $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Digamos que $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = S$. Veja que $a_i + a_{n-i+1} = a_1 + c(i-1) + a_1 + c(n-i) = 2a_1 + c(n-1)$, que não depende de i. Assim, se somarmos S duas vezes e parearmos os a_i's com a_{n-i+1}'s, temos que $2S = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_n + a_1) = n[2a_1 + c(n-1)]$, fazendo com que $S = \frac{n[2a_1 + c(n-1)]}{2} = a_1 \cdot n + \frac{n(n-1)c}{2}$, sendo então essa a soma dos n primeiros termos de uma PA. Agora para a questão, basta ver que $c = 1$ e $a_1 = 1$, então se $T = 1+2+\ldots+n$, $T = a_1 \cdot n + \frac{n(n-1)c}{2} = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$.

Problema 3. Mostre que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ não podem ser termos de uma mesma PA.

Solução. Suponha que ambos fazem parte de uma mesma PA de razão r. Temos que $\sqrt{2}+rc_1 = \sqrt{3}$ e $\sqrt{3}+rc_2 = \sqrt{5}$, por definição, onde $c_1, c_2 \in \mathbb{Z}_+^*$. Isolando o r, ficamos com $r = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{c_1}$ e $r = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{c_2}$, onde igualando chegamos em $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{c_1} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{c_2}$, isso é, $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{c_1}{c_2}$, com $c_1, c_2 \in \mathbb{Z}_+^*$.

Logo, para chegar em absurdo, precisamos provar que $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ é irracional.

Suponha que $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ é racional, isso é, $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $mdc(p,q) = 1$. Racionalizando, temos que $\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2} = \frac{p}{q}$, então queremos mostrar que $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{3}) = 3+\sqrt{15}-\sqrt{10}-\sqrt{6} = \frac{2p}{q}$, que é análogo a provar que $\sqrt{15}-\sqrt{10}-\sqrt{6} = \frac{2p}{q}-3$, isso é, $\sqrt{15}-\sqrt{10}-\sqrt{6}$ é racional. Sendo $j \in \mathbb{Q}$ tal que $\sqrt{15}-\sqrt{10}-\sqrt{6} = j$, temos que $j^2 = 15+10+6+2(2\sqrt{15}-5\sqrt{6}-3\sqrt{10})$, então $\frac{j^2-31}{2} = 2\sqrt{15}-5\sqrt{6}-3\sqrt{10}$. Veja que $2j - \frac{j^2-31}{2} = 3\sqrt{6}+\sqrt{10}$, que é racional, por suposição. Sendo $k \in \mathbb{Q}$ tal que $k = 3\sqrt{6}+\sqrt{10} = \sqrt{2}(3\sqrt{3}+\sqrt{5})$, então $\frac{k^2}{2} = 32+6\sqrt{15}$, mas $\sqrt{15} = \frac{\frac{k^2}{2}-32}{6}$, que é racional, por suposição, chegando em absurdo. Logo, concluímos que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ não fazem parte de uma mesma PA.

2.2 Progressões geométricas (PG's)

As progressões geométricas, também conhecidas como PG's, são sequências onde cada termo é produtado uma certa constante em relação ao anterior, isso é, $a_n = c \cdot a_{n-1}$, para $c \in \mathbb{R}$.

Assim, veja que já vimos a ideia de como resolver uma PG, basta fazer um produto telescópico em $\frac{a_n}{a_{n-1}} = c$, que faz com que $a_n = c^{n-1} \cdot a_1$, $\forall\ n$ índice da sequência.

Problema 1. (OMCPLP/2024) Determine as progressões geométricas tais que o produto dos três primeiros termos é 64 e a soma é 14.

Solução. Temos que $a_1+a_2+a_3 = 14$ e $a_1a_2a_3 = 64$, pelo enunciado. Como a sequência é uma PG, então $a_2 = c \cdot a_1$ e $a_3 = c^2 \cdot a_1$, logo, $a_1 + c \cdot a_1 + c^2 \cdot a_1 = 14$ e $a_1^3 \cdot c^3 = 64$. Por $a_1^3 \cdot c^3 = 64$, temos que $a_1 \cdot c = 4$, que substituindo na soma fica $a_1 + c \cdot a_1 + c^2 \cdot a_1 = a_1 + 4 + 4a_1 = 5a_1 + 4 = 14$, concluindo então que $a_1 = 2$, e consequentemente que $c = 2$. Assim, as PG's que satisfazem são aquelas com $a_1 = 2$ e $a_n = c^{n-1} \cdot a_1 = 2^n$, $\forall\ n$ inteiro positivo.

Problema 2. Determine a soma dos n's primeiros termos de uma PG.

Solução. Defina a sequência $\{a_n\}_{n\geq 1}$ uma PG. Queremos determinar $a_1+a_2+\ldots+a_n = S$. Multiplicando pela razão da PG, temos que $a_1 \cdot c + \ldots + a_n \cdot c = S \cdot c$, que por definição é $a_2+\ldots+a_{n+1} = S \cdot c$. Assim, subtraindo nossa igualdade original da que temos agora, concluímos que $S(c-1) = a_{n+1} - a_1 = a_1 \cdot c^n - a_1 = a_1(c^n - 1)$, isso é, $S = \frac{a_1(c^n-1)}{c-1}$.

Problema 3. Se (a, b, c) formam uma PA e uma PG, nessa ordem, prove que $a = b = c$.

Solução. Observe que, sendo r a razão da PA e q a razão da PG, temos que $b = a + r$ e $c = a + 2r$. Também, $b = a \cdot q$ e $c = a \cdot q^2$, fazendo com que $a + r = a \cdot q$ e $a + 2r = a \cdot q^2$. Logo, $a \cdot q - a = r = \frac{a \cdot q^2 - a}{2}$, então $2a \cdot q - 2a = a \cdot q^2 - a$, que implica que $2 \cdot q - 2 = q^2 - 1$, dividindo por a. Assim, temos que $0 = q^2 - 2 \cdot q + 1 = (q-1)^2$, ou seja, $q = 1$, que faz com que $b = a \cdot q = a$ e $c = a \cdot q^2 = a$.

3 Recorrências de segunda ordem

Ao trabalhar com as progressões, veja que tínhamos um termo da sequência em função de um termo anterior. Para as recorrências de segunda ordem, iremos trabalhar com um termo da sequência em função de outros dois termos anteriores. Vamos começar com um exemplo conhecido:

Problema 1. Em uma terra de pinguins imortais, cada um deles conseguem se reproduzir sozinhos depois de adultos. Começando com um pinguim adulto na terra, ele se reproduz e nasce um pinguim filhote. Após um ano, esse pinguim cresce, ficando dois adultos, porém o primeiro pinguim se reproduz novamente, ficando dois adultos e um filhote. No próximo ano, o filhote cresce, mas os dois adultos se reproduzem, ficando assim três adultos e dois filhotes. Esse processo é repetido infinitamente na terra dos pinguins. Determine quantos pinguins estão na terra no n-ésimo ano.

Solução. Vamos transformar o problema em uma linguagem matemática. Defina como $\{a_n\}$ a sequência de pinguins filhotes no n-ésimo ano e $\{b_n\}$ a de pinguins adultos no n-ésimo ano. Queremos determinar $\{a_n + b_n\} = \{c_n\}$. Veja que $a_n = b_{n-1}$, pois a quantidade de filhotes é a quantidade de adultos no ano passado. Também, $b_n = b_{n-1} + a_{n-1}$, pois após um ano todos os pinguins nascidos já serão adultos. Assim, temos que $b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$, onde queremos descobrir a sequência $\{a_n + b_n\} = \{b_{n-1} + b_n\} = \{c_n\}$, que é a mesma sequência de b_n, mas um ano após. Veja que resolveremos o problema se determinarmos a sequência $b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$, com $b_1 = 1$ e $b_2 = 2$.

Essa recorrência que criamos é uma recorrência de segunda ordem. Vamos resolvê-la para depois entender como resolver recorrências de segunda ordem mais gerais, isso é, recorrências da forma $a_n = x_1 \cdot a_{n-1} + x_2 \cdot a_{n-2}$, onde sabemos a_1 e a_2, explicitamente ou não. A ideia é transformar em produtos telescópicos com mesma proporção, isso é, queremos passar um θ do x_1 para ficarmos com $a_n - \theta \cdot a_{n-1} = (x_1 - \theta) \cdot a_{n-1} + x_2 \cdot a_{n-2}$ e queremos achar o θ que mantém a proporção para que seja interessante fazer uma telescópica, então queremos θ tal que $\frac{1}{-\theta} = \frac{x_1 - \theta}{x_2}$, isso é, $\theta^2 - x_1 \cdot \theta - x_2 = 0$. Resolvendo a equação para a sequência da questão, que é $b_n - b_{n-1} - b_{n-2} = 0$ temos que $\theta_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\theta_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Assim, temos que $\theta_1\theta_2 = -1$ e $\theta_1 + \theta_2 = 1$. Como θ_1 mantém a proporção na equação original, então temos $b_n - \theta_1 \cdot b_{n-1} = (1 - \theta_1) \cdot b_{n-1} + \cdot b_{n-2}$, que, pelas relações encontradas, fica $b_n - \theta_1 \cdot b_{n-1} = \theta_2 \cdot b_{n-1} - \theta_1\theta_2 \cdot b_{n-2} = \theta_2(b_{n-1} - \theta_1 \cdot b_{n-2})$. Fazendo o produto telescópico, é possível concluir que:

$$
\begin{gathered}
b_n - \theta_1 \cdot b_{n-1} = \theta_2(b_{n-1} - \theta_1 \cdot b_{n-2}) \\
b_{n-1} - \theta_1 \cdot b_{n-2} = \theta_2(b_{n-2} - \theta_1 \cdot b_{n-3}) \\
\dots \\
b_3 - \theta_1 \cdot b_2 = \theta_2(b_2 - \theta_1 \cdot b_1) \\
b_2 - \theta_1 \cdot b_1 = \theta_2(b_1 - \theta_1 \cdot b_0)
\end{gathered}
$$

Perceba que não temos b_0 na sequência, mas se fizermos a sequência de forma inversa, temos que $b_2 = b_1 + b_0$, isso é, $2 = 1 + b_0$, então suponha que $b_0 = 1$. Ficamos então com $b_n - \theta_1 \cdot b_{n-1} = \theta_2^{n-1}(b_1 - \theta_1 \cdot b_0) = \theta_2^{n-1}(1-\theta_1) = \theta_2^{n-1}(\theta_2) = \theta_2^n$, então $b_n - \theta_1 \cdot b_{n-1} = \theta_2^n$. Analogamente, se substituirmos a raiz inicial por θ_2, temos que $b_n - \theta_2 \cdot b_{n-1} = \theta_1^n$, que subtraindo uma da outra fica $b_{n-1}(\theta_1 - \theta_2) = \theta_2^n - \theta_1^n$, isso é, concluimos que $b_n = \frac{\theta_1^{n+1} - \theta_2^{n+1}}{\theta_1 - \theta_2}$, $\forall\ n \in \mathbb{Z}_+^*$, onde sabemos quem são os θ_1 e θ_2. Com isso, determinamos a quantidade de pinguins no ano. Algo interessante é que essa é a famosa sequência de Fibonacci.

Veja que podemos fazer algo análogo para resolver as recorrências de maneira mais geral, como as $a_n = x_1 \cdot a_{n-1} + x_2 \cdot a_{n-2}$, basta seguir os seguintes passos:

1−**Polinômio característico:**
Temos que a recorrência $a_n = x_1 \cdot a_{n-1} + x_2 \cdot a_{n-2}$ pode ser escrita como $a_n - x_1 \cdot a_{n-1} - x_2 \cdot a_{n-2} = 0$. Nosso polinômio característico será $x^2 - x_1 \cdot x - x_2 = 0$, pelo mesmo motivo do que foi feito na questão acima. Também, chame de r_1 e r_2 as raizes desse polinômio.

2−**Achar as constantes que resolvem nossa recorrência:**
Seguindo de forma análoga no processo, temos que $a_n = C_1 \cdot r_1^n + C_2 \cdot r_2^n$, onde para descobrir as constantes, basta usar os dois termos iniciais dados na sequência. Por exemplo, sendo a_1 e a_2 os termos iniciais, temos que $C_1 \cdot r_1^1 + C_2 \cdot r_2^1 = a_1$ e $C_1 \cdot r_1^2 + C_2 \cdot r_2^2 = a_2$, onde os r's são conhecidos, então temos duas equações com duas variáveis de grau 1, bastando resolver o sistema de equações para descobrir as constantes.

Esse processo nos ajuda a resolver praticamente todas as recorrências lineares de segunda ordem, exceto em uma coisa. Caso as raizes sejam iguais do polinômio característico, é necessário resolver uma função linear ao invés da constante, isso é, $a_n = (A + n \cdot B)r^n$. Porém, a maneira para achar A, B é análogo ao que é feito no caso anterior, precisando apenas substituir pelos a's conhecidos, geralmente a_1 e a_2. Com isso, conseguimos resolver todas as recorrências lineares de segunda ordem.

Problema 2. Dertemine a quantidade de palavras de n letras formadas apenas por a,b e c tais que nenhuma palavra tem dois a's consecutivos.

Solução. Apesar de parecer um problema que é resolvido com ideias combinatórias, é possível transformá-lo em recorrências. Chame de x_n a quantidade de palavras de n letras que terminam em a, y_n a quantidade que termina em b ou c e z_n o total de palavras de n letras. Temos que $z_n = x_n + y_n$. Perceba que as palavras contadas em x_n tem penúltima letra diferente de a, pela regra do enunciado. Também, todas as palavras que terminam em b ou c podem tem um a após elas, logo, é possível estabelecer a bijeção de que $x_n = y_{n-1}$. Também, veja que a quantidade de palavras de n letras terminadas em b ou c podem estabelecer uma relação com qualquer outras de $n-1$ letras, pois não temos nenhuma restrição no enunciado. Portanto, $2 \cdot z_{n-1} = y_n$. Substituindo, temos $z_n = y_n + y_{n-1} = 2 \cdot z_{n-1} + 2 \cdot z_{n-2}$, que é uma recorrência linear de segunda ordem, onde já sabemos os passos para resolver:

1−**Polinômio característico:**
Temos a recorrência $z_n - 2 \cdot z_{n-1} - 2 \cdot z_{n-2} = 0$, cujo polinômio característico é $x^2 - 2x - 2$, e com as raízes $k_1 = 1 + \sqrt{3}$ e $k_2 = 1 - \sqrt{3}$.

2−**Achar as constantes que resolvem nossa recorrência:**

Já sabemos que $z_n = C_1(1+\sqrt{3})^n + C_2(1-\sqrt{3})^n$, e precisamos achar as constantes C_1 e C_2. Fazendo casos iniciais, já sabemos que $z_1 = 3$, pois temos apenas a, b e c, enquanto $z_2 = 8$, pois temos ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb e cc. Assim, $C_1(1+\sqrt{3}) + C_2(1-\sqrt{3}) = 3$ e $C_1(4+2\sqrt{3}) + C_2(4-2\sqrt{3}) = 8$. Assim, da segunda equação, temos que $2[C_1(2+\sqrt{3}) + C_2(2-\sqrt{3})] = 8$, fazendo com que $C_1(2+\sqrt{3}) + C_2(2-\sqrt{3}){=}4$. Mas como $C_1(1+\sqrt{3}) + C_2(1-\sqrt{3}) = 3$, podemos subtrair as duas para chegar em $C_1 + C_2 = 1$, e assim tendo $C_2 = 1 - C_1$. Substituindo, temos $C_1(1+\sqrt{3}) + (1-C_1)(1-\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}C_1 + 1 - \sqrt{3} = 3$, então $C_1 = \frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}+3}{6}$. Logo, $C_2 = 1 - C_1 = \frac{3-2\sqrt{3}}{6}$.

Dado que descobrimos C_1 e C_2, nós temos então que $z_n = C_1(1+\sqrt{3})^n + C_2(1-\sqrt{3})^n = (\frac{3+2\sqrt{3}}{6})(1+\sqrt{3})^n + (\frac{3-2\sqrt{3}}{6})(1-\sqrt{3})^n$, chegando no resultado.

É interessante observar que o problema buscava uma resposta que envolvesse quantidade de coisas que certamente seriam inteiras, mas nossa resposta deu algo que parece irracional. Tente provar o porquê da nossa equação ser inteira, $\forall\ n \in \mathbb{Z}_+^*$.

Problema 3. Uma sequência $\{a_n\}$ é definida por $a_n = 4a_{n-1} + 9$, onde $a_1 = 4$. Determine a_n.

Solução. Uma maneira de resolver recorrências dessa forma é transformando-a em uma recorrência linear de segunda ordem. Para isso, basta ver que $a_n = 4a_{n-1} + 9$ e $a_{n-1} = 4a_{n-2} + 9$, então $a_n - a_{n-1} = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$, fazendo com que $a_n - 5a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0$. Agora, basta resolver a recorrência:

1−**Polinômio característico:**
O polinômio característico é $x^2 - 5x + 4 = 0$, então suas raízes são $k_1 = 4$ e $k_2 = 1$.

2−**Achar as constantes que resolvem nossa recorrência:**
Sendo C_1 e C_2 as constantes, temos $a_n = C_1 \cdot 4^n + C_2 \cdot 1^n = C_1 \cdot 4^n + C_2$. Veja que $a_1 = 4$, que implica que $a_2 = 4 \cdot 4 + 9 = 25$. Logo, temos que $a_1 = 4 \cdot C_1 + C_2 = 4$ e $a_2 = 16 \cdot C_1 + C_2 = 25$, então subtraindo uma da outra, temos $12 \cdot C_1 = 21$, $C_1 = \frac{21}{12} = \frac{7}{4}$, e substituindo, $7 + C_2 = 4$, fazendo com que $C_2 = -3$.

Agora que sabemos as constantes e as raízes, temos que $a_n = \frac{7 \cdot 4^n}{4} - 3 = 7 \cdot 4^{n-1} - 3$.

É possível estabelecer mais relações para recorrências de ordem maior, como por exemplo, como descobrir o termo geral de uma recorrência de terceira ordem, mas devido a sua complexidade, não veremos nesse material.

4 Problemas Propostos

Problema 1. A sequência $1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 2, \ldots$ é definida por uma sequência de blocos de 2 separadas por 1's, onde cada n-ésimo bloco de 2's tem n dois. Determine a soma dos 2025 primeiros termos.

Problema 2. Uma sequência $\{a_n\}$ de inteiros é definida por $a_0 = 0$ e $a_n = 3a_{n-1} + 1$. Prove que o a_{155} é divisível por 11.

Problema 3. De quantas maneiras podemos guardar n dominós 2×1 em uma caixa $2 \times n$?

Problema 4. Determine a_n, em termos de n, sabendo que $4a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$.

Problema 5. Prove que existe pelo menos 8^n números de n algarismos sem nenhum bloco de dois algarismos consecutivos iguais.

Problema 6. (TST Cone Sul/2013) Uma sequência de reais $a_1, a_2, a_3, \ldots$ é tal que $a_1 = 1$, $a_2 = 9$ e $a_{n+2} = 14a_{n+1} - a_n - 4$, para todos inteiros positivos n. Prove que para cada inteiro positivo n

Problema 7. Seja $\{a_n\}$ uma sequência de reais com $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ e $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2}{1+a_n} + a_{n+1}$, $\forall\ n \in \mathbb{Z}_+^*$. Prove que:

$$\frac{1}{1+a_1+a_2} + \frac{1}{1+a_2+a_3} + \ldots + \frac{1}{1+a_{1403}+a_{1404}} > \frac{2^{1403}-1}{2^{1404}}.$$

Bibliografia.
1. Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo
(POTI)

2. Art of Problem Solving
(AOPS)