Roto-Homotetia

Vinícius Martins Ribeiro

1 Introdução

Nesse material iremos estudar a Roto-Homotetia, uma transformação geométrica que somada com o conhecimento de outros conteúdos da geometria se torna uma arma muito poderosa para a resolução de diversos problemas.

2 O que é a Roto-Homotetia

A Roto-Homotretia nada mais é do que uma dilatação e uma rotação de uma figura em relação à um ponto, preservando as relações de ângulos e de razões entre uma figura e sua imagem em relação à roto-homotetia. Dessa forma seja $(.)'$ a imagem de (.) sobre uma roto homotetia em relação a um ponto X, então $\triangle ABX$ é diretamente semelhante ao $\triangle A'B'X$

Corolário muito importante: Se um triângulo ABC é diretamente semelhante ao triângulo AXY e os pontos correspondentes da semelhança estão no mensmo sentiddo então A é o centro da Roto-homotetia que leva BC em XY

Esse cororálio se dá pelo fato de que duas figuras semlehantes ou são levadas uma na outra ou por translação ou por uma Roto-Homotetia, onde a Roto-Homotetia preserva a forma da figura e o sentido dos seus pontos pelo fato de ser uma rotação

2.1 Um centro e dois segmentos geram duas roto-homotetias

Teorema 1: Se X é o cetro da roto-homotetia que leva A em A' e B em B' então X e o centro da roto-homotetia que leva A em B e A' em B'

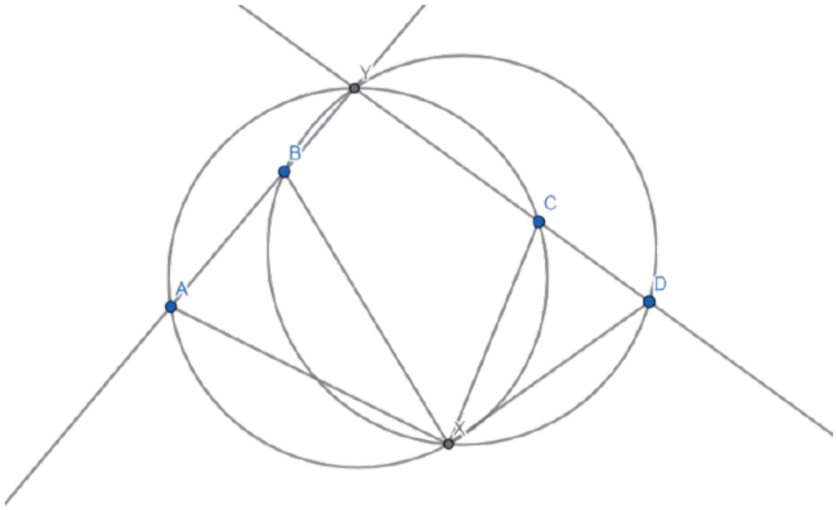
2.2 Construção do centro da roto-homotetia entre dois segmentos

Lema 1: Sejam AB e CD dois segmentos no plano, seja $Y = AB \cap CD$, seja $X = (ACY) \cap (BDY) \neq Y$, então X é o centro da roto-homotetia que leva AB em CD, levando A em C e B em D

Prova: Vamos provar o lema por ponto fantasma, seja X' o centro da roto-homotetia que leva AB em CD, levando A em C e B em D, por definição de roto-homotetia $\angle X'AB = \angle XCD$, note que $\angle YCX' = 180 - \angle X'AB \Rightarrow YCX'A$ é cíclico, analogamente $YBX'D$ é cíclico, portanto, o lema está provado!

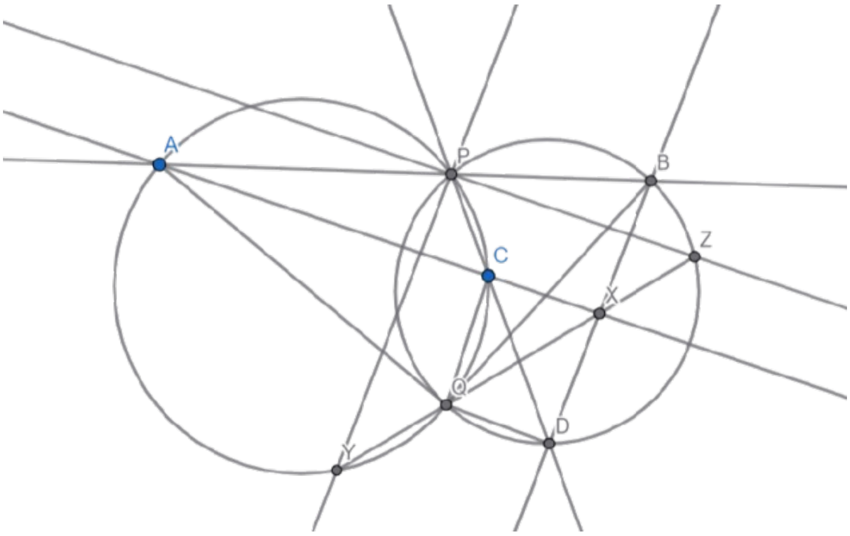
Corolário 1: Sejam AB e CD dois segmentos no plano, então o centro da roto-homotetia que leva AB em CD, levando A em C e B em D é único

Prova: Pelo lema anterior sendo X o centro dessa roto-homotetia então $X = (ACY) \cap (BDY)$, como A, B,C e Y já foram definidos então X é único.



2.3 Resolvendo USA TST apenas com definição e construção do centro da roto-homotetia

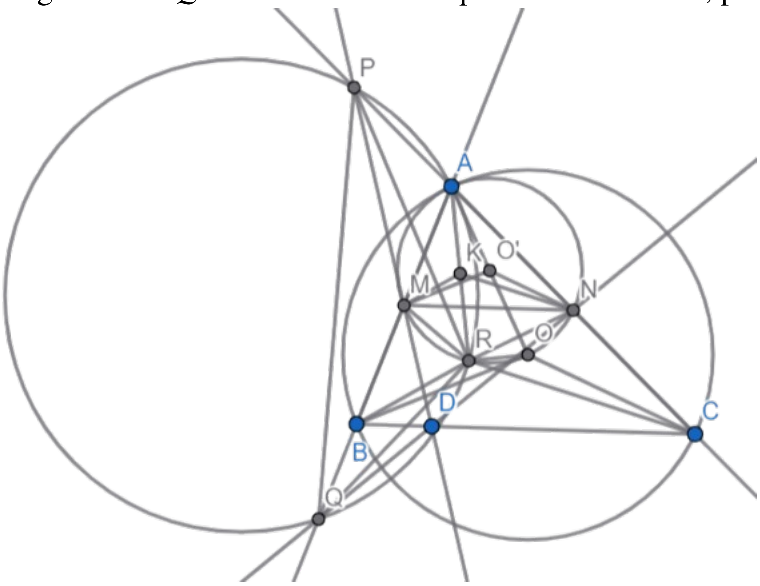
USA TST 2007 Os círculos ω_1 e ω_2 se encontram em P e Q. Os segmentos AC e BD são cordas de ω_1 e ω_2 respectivamente, tais que o segmento AB e a semi-reta CD se encontram em P. A semi-reta BD e o segmento AC se encontram em X. O ponto Y está em ω_1 tal que $PY \parallel BD$. O ponto Z está em ω_2 tal que $PZ \parallel AC$. Prove que os pontos Q, X, Y, Z são colineares.



Solução: Seja $\angle AQC = \alpha$ e $\angle AQY = \beta$, como AQCP é cíclico, então $\angle YPC = 180 - \alpha - \beta$, como $PY \parallel BD$ => $\angle PDB = 180 - \beta - \alpha$, portanto, queremos CQDX cíclico. Porém note que pelo lema 1 Q é o centro da roto-homotetia que leva A em C e B em D, além disso, pelo teorema 1, Q é o centro da roto-homotetia que leva A em B e C em D, portanto como $X = AC \cap BD$, pela construção do centro da roto-homotetia que leva AC em BD, como C vai em D e A vai em B então CXDQ é cíclico, assim como XQAB, portanto, $\angle CQX = \angle CDX = \angle PDB = 180 - \alpha - \beta$, portanto $\angle AQY + \angle AQC + \angle CQX = 180$ => Q, X e Y são colineares, analogamente Q, X e Z são colineares, portanto Y, Q, X e Z são colineares ■

2.4 Amassando o P2 da Ibero 2024 com roto-homotetia

P2 Ibero-Americana 2024 Seja $\triangle ABC$ um triângulo acutângulo e sejam M, N os pontos médios de AB, AC, respectivamente. Dado um ponto D no interior do segmento BC com $DB < DC$, sejam P, Q as interseções de DM, DN com AC, AB, respectivamente. Seja $R \neq A$ a interseção dos circuncírculos dos triângulos $\triangle PAQ$ e $\triangle AMN$. Se K é o ponto médio de AR, prove que $\angle MKN = 2\angle BAC$.



Olhando para o problema, claramente parece uma boa ideia marcar o circuncentro O do $\triangle ABC$ e O' do $\triangle AMN$, já que $\angle BOC = \angle MO'N = 2\angle BAC$, portanto, queremos $MKO'N$ cíclico. Outro fato interessante sobre O' é que ele é o ponto médio de AO, já que os triângulos AMN e ABC tem semelhança de razão $\frac{1}{2}$. Agora, podemos ver que parece muito melhor trabalhar com R ao invés de K e junto disso temos diversos segmentos com vértice A com seus pontos médios marcados, portanto parece uma boa ideia tomar uma homotetia de centro A e razão 2. Agora, podemos começar a solução.

Solução: Seja O o circuncentro do $\triangle ABC$ e O' o circuncentro do $\triangle AMN$. Seja $\angle BAC = x$, note que $\angle BOC = \angle MO'N = 2x$, portanto, queremos $KO'NM$ cíclico. Agora, tome uma homotetia de centro A e razão 2, portanto, queremos $ROCB$ cíclico. Pelo lema 1, R é o centro da roto-homotetia que leva Q em M e P em N, dessa forma, pelo teorema 1 R é o centro da roto-homotetia que leva Q em P e M em N.

Lema: $\frac{AP}{PC} = \frac{AQ}{QB}$

Prova: Por Menelaus em $\triangle ABC$, $\frac{AP}{PC} \cdot \frac{CD}{BD} \cdot \frac{BM}{AM} = 1$, porém sabemo que BM = AM, portanto $\frac{AP}{PC} = \frac{BD}{CD}$, analogamente por Menelaus em $\triangle ABC$ olhando para Q, $\frac{AQ}{QB} = \frac{BD}{CD} = \frac{AP}{PC}$ **Lema Provado!**.

Utilizando esse lema, como R é o centro da roto-homotetia que leva QM em PN e dado essa igualdade de razões, então R é o centro da roto-homotetia que leva MB em NA, portanto $\triangle BMR$ é diretamente semelhante ao $\triangle ANR$.

Agora, vamos marcar angulos, seja $\angle ARN = y$, então $\angle BRM = y$, como AMRN é cíclico então $\angle ARN = \angle AMN = y \Rightarrow \angle ANM = 180 - x - y$. Pela homotetia, AO é o diâmetro de AMRN => $\angle ARO = 90$, portanto $\angle BRO = 360 - (\angle BRM + \angle MRA + 90) = 360 - (y + 180 - y - x + 90) = 90 + x$,porém sabemos que $\angle OCB = 90 - x \Rightarrow \angle BRO + \angle OCB = 180$, portanto ROCB é cíclico => $MKO'N$ é cíclico => $\angle MKN = \angle MO'N = 2\angle BAC$ ■

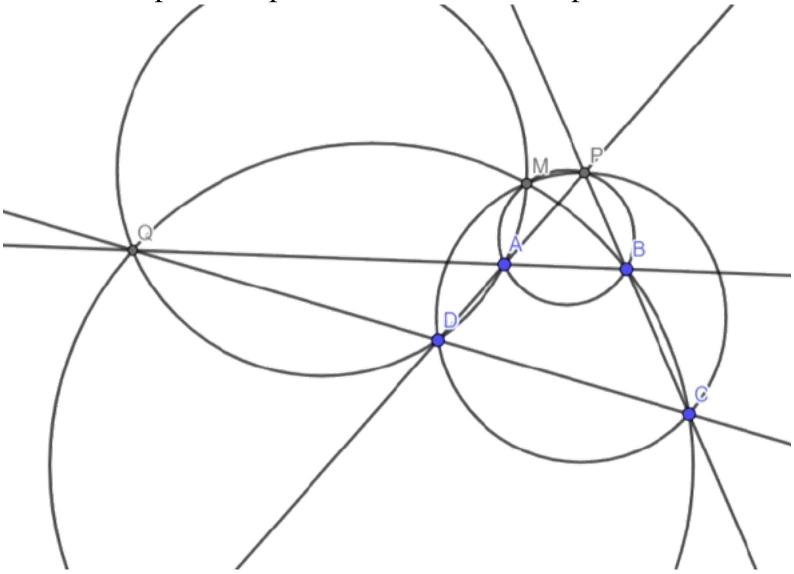
3 Roto-homotetia em quariláteros completos

3.1 Roto-Homotetia e o ponto de míquel

Seja ABCD um qudrilátero convexo onde AC e BD são diagonais, seja $Q = AB \cap CD$ e $P = AD \cap BC$, então definimos $(PDC) \cap (PAB) = M$, para ser o ponto de míquel, estudando um pouco mais a fundo quadriláteros completos, conseguimos provar que $M \in (BCQ)$ e $M \in (ADQ)$, porém nesse material não irei provar esse fato.

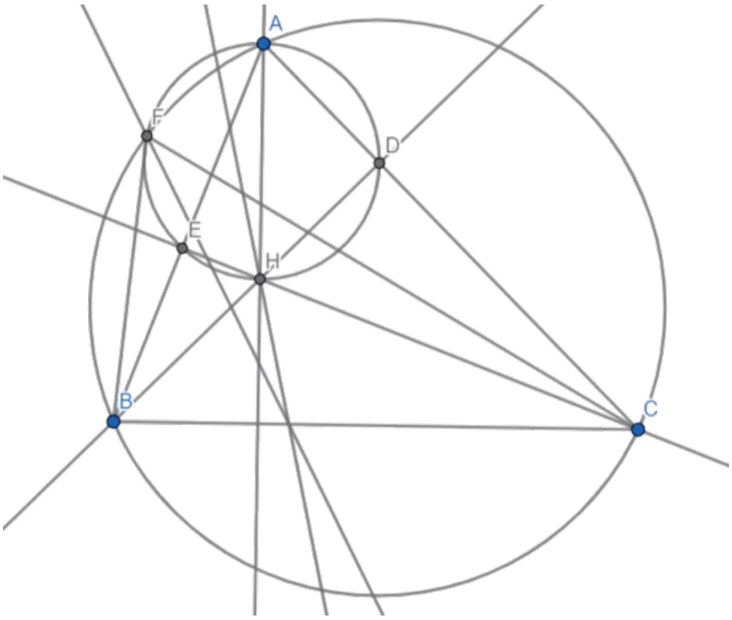
Lema 2: M é o centro da Roto-Homotetia que leva AB em CD e consequentemente AD em BC

Prova: Pela definição de M, $\angle MCD = \angle MPD = \angle MPA = \angle MBA$ e $\angle AMB = \angle APB = \angle DPC = \angle DMC$, portanto $\triangle MAB$ e $\triangle MDC$ são diretamente semelhantes, onde os pontos estão listados no mesmo sentido, portanto pelo corolário muito importante o lema segue.



3.2 Resolvendo P2 OBM nível 3 2011 com Roto-Homotetia em um quadrilátero completo

P2 OBM N3 2011 Seja ABC um triângulo acutângulo e H o ortocentro. Seja D a intersecção de BH com AC e E a intersecção de CH com AB. O circuncírculo de ADE corta o circuncírculo de ABC em $F \leq A$. Prove que as bissetrizes de $\angle BFC$ e $\angle BHC$ coincidem em um ponto em BC.



Solução: De cara, é claro que o problema acaba se $\frac{BH}{CH} = \frac{BF}{BC}$, pelo teorema da bissetrtiz interna. Agora, note que pelo lema 2, $\frac{BF}{CF} = \frac{FE}{FD}$, por fim, note que F é o queue point, onde voce pode aprender mais sobre ele no meu material de ortocentro, cujo deixarei o link no final desse material, e é fato conhecido que FEHD é harmônico, portanto $\frac{FE}{FD} = \frac{HE}{HD}$ e por potência de ponto $\frac{HE}{HD} = \frac{BH}{CH}$, portanto $\frac{BF}{FC} = \frac{FE}{FD} = \frac{HE}{HE} = \frac{BH}{CH}$ ■

4 Problemas

Problema 1: JBMO Seja ABC um triângulo acutângulo com $AB < AC < BC$ e seja $c(O,R)$ seu circuncírculo. Os diâmetros BD e CE são desenhados. O círculo $c_1(A,AE)$ intercepta AC em K. O círculo $c_2(A,AD)$ intercepta BA em L. (A está entre B e L). Prove que as retas EK e DL se interceptam no círculo c.

Problema 2: IMO Shortlist 2012 Seja ABC um triângulo acutângulo e H o ortocentro. Seja D a intersecção de BH com AC e E a intersecção de CH com AB. O circuncírculo de ADE corta o circuncírculo de ABC em $F \leq A$. Prove que as bissetrizes de $\angle BFC$ e $\angle BHC$ coincidem em um ponto em BC.

Problema 3: P4 IMO 2014 Sejam P e Q no segmento BC de um triângulo acutângulo ABC tal que $\angle PAB = \angle BCA$ e $\angle CAQ = \angle ABC$. Sejam M e N os pontos em AP e AQ, respectivamente, tais que P é o ponto médio de AM e Q é o ponto médio de AN. Prove que a intersecção de BM e CN está na circunferência do triângulo ABC.

Problema 4: Romênia TST 2015 Seja ABC um triângulo. Sejam P_1 e P_2 pontos do lado AB tais que P_2 esteja sobre o segmento BP_1 e $AP_1 = BP_2$; da mesma forma, sejam Q_1 e Q_2 pontos do lado BC tais que Q_2 esteja sobre o segmento BQ_1 e $BQ_1 = CQ_2$. Os segmentos P_1Q_2 e P_2Q_1 se encontram em R, e os círculos P_1P_2R e Q_1Q_2R se encontram novamente em S, situados dentro do triângulo P_1Q_1R. Finalmente, seja M o ponto médio do lado AC. Prove que os ângulos P_1RS e Q_1RM são iguais.

Problema 5: Marrocos TST 2015 Seja $ABA'B'$ um quadrilátero convexo, com $AA' \cap BB' = S$. e Seja T a intersecção dos circuncírculos de ABS e $A'B'S$. Sejam C e C' pontos nas retas AB e $A'B'$, respectivamente, tais que B esteja entre A e C, e B' esteja entre A' e C'. e Sejam K e L pontos nos segmentos SB e SA, respectivamente, tais que K, B, C, T sejam cocíclicos e $A'; C'; T, L$ sejam cocíclicos. Prove que C, C', K, L são colineares se e somente se $\frac{CA}{BC} = \frac{C'A'}{C'B'}$

Problema 6: USA TST 2008 Seja ABC um triângulo com G como baricentro. Seja P um ponto variável no segmento BC. Os pontos Q e R estão nos lados AC e AB, respectivamente, tais que $PQ \parallel AB$ e $PR \parallel AC$. Prove que, à medida que P varia ao longo do segmento BC, o circuncírculo do triângulo AQR passa por um ponto fixo X tal que $\angle BAG = \angle CAX$.

Problema 7: G9 Imo Shortlist 2009 Os pontos A_1, B_1, C_1 são escolhidos nos lados BC, CA, AB de um triângulo ABC respectivamente. Os circuncírculos dos triângulos AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 interceptam o circuncírculo do triângulo ABC novamente nos pontos A_2, B_2, C_2 respectivamente ($A_2 \neq A, B_2 \neq B, C_2 \neq C$). Os pontos A_3, B_3, C_3 são simétricos a A_1, B_1, C_1 em relação aos pontos médios dos lados BC, CA, AB respectivamente. Prove que os triângulos $A_2B_2C_2$ e $A_3B_3C_3$ são semelhantes.

Bibliografia: (AOPS) Art of problem solving, (EGMO) Euclidean Geometry in Matemathical Olympiads, Material ortocentro: `https://ampulhetadosaber.com/wp-content/uploads/2025/03/Queue-Ponto-e-Ortocentro.pdf`